СПРАВОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ

Л. А. ЛЮСТЕРНИКА

И

А. Р. ЯНПОЛЬСКОГО

Н. Я. ВИЛЕНКИН, Е. А. ГОРИН, А. Г. КОСТЮЧЕНКО,
М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, С. Г. КРЕЙН, В. П. МАСЛОВ,
Б. С. МИТЯГИН, Ю. И. ПЕТУНИН, Я. Б. РУТИЦКИЙ,
В. И. СОБОЛЕВ, В. Я. СТЕЦЕНКО, Л. Д. ФАДДЕЕВ,
Э. С. ЦИТЛАНАДЗЕ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Под редакцией
С. Г. КРЕЙНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1964

517.2 (03)
В 44
УДК 517.4 (083)

АННОТАЦИЯ

Настоящий выпуск серии *СМБ* содержит большой материал, в основном группирующийся вокруг теории операторов и операторных уравнений. Здесь изложены основные понятия и методы функционального анализа, теория операторов в гильбертовом пространстве и в пространствах с конусом, теория нелинейных операторных уравнений, теория нормированных колец, приложения к уравнениям в частных производных, к интегральным уравнениям. Отдельная глава посвящена основным операторам квантовой механики. Значительное место в книге занимает изложение теории обобщенных функций, снабженное рядом таблиц.

Характер изложения здесь конспективный; в логически связной форме разъясняются математические факты; теоремы и формулы, как правило, даются без доказательств. Главное внимание уделяется идейной стороне вопроса, не заслоненной излишними деталями.

Книга предназначена для математиков, механиков и физиков. В ней найдут много полезного для себя студенты и аспиранты соответствующих специальностей.

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Справочная математическая библиотека

Функциональный анализ.

Под редакцией *С. Г. Крейна*

М., 1964 г. 424 стр. с илл.

Редактор *В. Ф. Гапошкин.*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр.* Корректор *Т. С. Плетнева.*

Сдано в набор 2/X 1963 г. Подписано к печати 6/II 1964 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$.
Физ. печ. л. 13,25. Условн. печ. л. 21,73. Уч.-изд. л. 19,63. Тираж 17500 экз.
Т-00944. Цена книги 1 р. 08 к. Заказ № 1013.

Издательство «Наука».

Главная редакция физико-математической литературы.

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Главполиграфпрома
Государственного комитета Совета Министров СССР по печати.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Функциональный анализ, зародившийся в начале нынешнего столетия и оформившийся в самостоятельную математическую науку в 20—30-х годах, развивался и развивается быстро и бурно. После выхода в свет знаменитой книги польского математика С. Банаха (Théorie des opérations linéares, Warszawa, 1932, есть украинский перевод, см. [3]) идеи и язык функционального анализа проникают в самые различные разделы математики и ее приложений. Процесс этого проникновения зашел в настоящее время так далеко, что иногда трудно отделить функциональный анализ от тех дисциплин, в которых он применяется.

С другой стороны, рамки классического функционального анализа в некоторых вопросах оказались узкими, что привело к пересмотру его отправных позиций, к детальному анализу его аксиоматики. Этот процесс, протекавший особенно бурно в последнем десятилетии, нельзя считать еще законченным. В связи с этим можно напомнить, что проблемный доклад по функциональному анализу на IV Всесоюзном математическом съезде был начат И. М. Гельфандом пессимистическими словами: «У нас еще нет хорошего определения пространства, у нас нет хорошего определения оператора».

Перед коллективом авторов настоящего справочника были две опасности: заблудиться в многочисленных логических и идейных истоках функционального анализа или расплыться по бесчисленным рукавам в дельте функционального анализа при впадении его в море математических наук. Чтобы избежать этих опасностей, авторы старались не уходить далеко от основного русла — теории операторов и операторных уравнений. Этой теории посвящен основной материал справочника. Исключением является большая последняя глава справочника «Обобщенные функции» (автор Н. Я. Виленкин), которую можно было бы отнести и к справочникам по математическому анализу, так как она содержит результаты проникновения идей и методов функционального анализа в задачи математического анализа.

Будучи стеснены априорными ограничениями объема справочника, авторы не смогли включить в него целиком или частично материал по ряду крупных разделов функционального анализа. По-видимому, целесообразно эти разделы указать.

В справочнике не освещена теория линейных топологических пространств. Лишь некоторые ее первичные понятия имеются в главе I «Основные понятия функционального анализа» (авторы С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Э. С. Цитланадзе). Для восполнения этого пробела читателю можно рекомендовать книгу Канторовича и Акилова «Функциональный анализ в нормированных пространствах» или Бурбаки «Топологические векторные пространства».

К материалу главы I примыкает эргодическая теория. Этот изящный по методам и интересный раздел, изложенный в книге Данфорда и Шварца «Теория операторов», в справочник не включен.

В главе II «Линейные операторы в гильбертовом пространстве» (авторы А. Г. Костюченко, С. Г. Крейн и В. И. Соболев) не затронута глубокая теория колец операторов Неймана. Многочисленные применения теории операторов в гильбертовом пространстве к уравнениям в частных производных показаны лишь иллюстративно.

В главе III «Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве» (автор С. Г. Крейн) приведены те факты из теории полугрупп, которые естественно трактуются как теоремы о дифференциальных уравнениях в банаховом пространстве. Конечно, это составляет лишь незначительную часть этой теории, изложение которой в книге Хилле и Филлипса «Функциональный анализ и полугруппы» занимает свыше 500 страниц.

Глава IV «Нелинейные операторные уравнения» (авторы М. А. Красносельский и Я. Б. Рутицкий) не содержит ряда вопросов нелинейного функционального анализа: аналитические методы исследования нелинейных уравнений, нелинейные дифференциальные уравнения с ограниченными и неограниченными операторами и др.

Справочник совсем не затрагивает теории аналитических функционалов Фантапье.

Общая теория полуупорядоченных пространств затрагивается лишь частично в главе V «Операторы в пространствах с конусом» (авторы М. А. Красносельский и В. Я. Стеценко). По этой теории имеется обширная монография Вулиха, Канторовича и Пинскера «Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах».

Глава VI «Коммутативные нормированные кольца» (авторы Е. А. Горин и Б. С. Митягин) содержит лишь изложение теории коммутативных нормированных колец и ее приложений к гармоническому анализу. В главе VII «Операторы квантовой механики» (авторы В. П. Маслов и Л. Д. Фаддеев) приведен справочный материал по применению теории операторов к основным задачам квантовой механики системы.

Наконец, в справочник не включены такие большие разделы, как теория представлений групп и приближенные методы решения операторных уравнений.

Несмотря на описанную неполноту справочника, мы надеемся, что он будет полезен математикам, механикам и физикам, работающим в областях, близких к функциональному анализу.

При пользовании справочником следует иметь в виду, что в нем отсутствуют леммы и теоремы и нет занумерованных формул. Элементарными частицами изложенного материала следует считать пункты, отмеченные в оглавлении. Для получения справки рекомендуется разыскать пункт по оглавлению либо по алфавитному указателю и прочитать весь пункт. В нем обычно содержится связное и относительно замкнутое изложение цикла вопросов.

В книге нет ссылок на работы, в которых получены те или иные результаты. В связи с этим, как правило, не указываются авторы этих результатов. Исключением являются лишь теоремы и понятия, которые прочно вошли в обиход с именами открывших их математиков. Библиография справочника состоит из учебников и книг, изданных на русском языке, обзорных статей из журнала «Успехи математических наук» и нескольких работ, которые содержат материал справочника, не освещенный в учебной и монографической литературе. Эти работы в основном относятся к материалу глав III и VII.

Главу VIII справочника автор Н. Я. Виленкин писал при постоянном контакте с И. М. Гельфандом, который фактически является ее соавтором. В этой главе широко использован материал выпусков «Обобщенные функции» ([10]—[14]), откуда заимствованы все таблицы. Авторы главы VI неоднократно прибегали к помощи Г. Е. Шилова. Отдельные справки, занимающие порой целые страницы справочника, авторам давали Л. А. Гуревич, М. Х. Гольдман, О. М. Козлов, М. Г. Крейн, В. М. Тихомиров. Всем этим лицам выражается глубокая благодарность.

С. Г. Крейн

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

§ 1. Линейные системы

1. Понятие линейной системы. Понятие линейной системы является одним из основных в функциональном анализе.

Множество E называется *вещественной (комплексной) линейной системой*, если для каждых двух его элементов x и y определена их *сумма* $x+y$ — элемент того же множества — и для любого элемента x и вещественного (комплексного) числа λ определено *произведение* λx, являющееся также элементом множества E, причем эти операции удовлетворяют следующим условиям (аксиомам):

1) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (ассоциативность сложения);

2) $x+y=y+x$ (коммутативность сложения);

3) в E существует такой элемент θ, что для любого $x \in E$ будет $0x=\theta$;

4) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$,

5) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$ (дистрибутивность);

6) $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$ (ассоциативность умножения);

7) $1x=x$.

По своей природе линейная система является алгебраической структурой, в которой отражены свойства, связанные со сложением и умножением на числа векторов евклидова пространства.

В линейной системе E можно ввести операцию, обратную к операции сложения элементов, которую естественно назвать *вычитанием*: под *разностью* $x-y$ понимают выражение $x+(-1)y$.

Примеры линейных систем.

а) Пусть E_n — совокупность всех векторов n-мерного евклидова пространства. Операции сложения двух векторов

$x=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ и $y=\{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$ из множества E_n и умножения вектора $x=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ на вещественное число λ вводятся естественным образом:

$$x+y=\{\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \ldots, \xi_n+\eta_n\},$$
$$\lambda x=\{\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \ldots, \lambda\xi_n\}.$$

Множество E_n, наделенное этими операциями, становится вещественной линейной системой.

б) Примером комплексной линейной системы является множество Λ всевозможных комплексных последовательностей $x=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$, в котором операции сложения элементов $x=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ и $y=\{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots\}$ и умножения элемента x на комплексное число λ определяются аналогичным образом:

$$x+y=\{\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \ldots, \xi_n+\eta_n, \ldots\},$$
$$\lambda x=\{\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \ldots, \lambda\xi_n, \ldots\}.$$

в) Множество $C(0, 1)$, состоящее из всевозможных непрерывных функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, становится вещественной линейной системой, если ввести обычным образом операцию сложения функций и умножения функции на число.

2. Линейная зависимость и независимость. Система элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *линейно независимой*, если соотношение вида $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k=\theta$ возможно лишь при $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$. В противном случае элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *линейно зависимыми.*

Бесконечная система элементов называется линейно независимой, если любой конечный набор различных элементов этой системы линейно независим.

Линейно независимая система $\{x_\alpha\}$ называется *алгебраическим базисом* линейной системы E, если всякий элемент $x\in E$ может быть представлен в виде линейной комбинации конечного числа элементов из $\{x_\alpha\}$:

$$x=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\alpha_i}.$$

Так как алгебраический базис является линейно независимой системой, то указанное представление элемента x определяется единственным образом.

Всякая линейная система обладает алгебраическим базисом. Любые два алгебраических базиса линейной системы E имеют одно и то же кардинальное число χ. Это кардинальное число называется *размерностью линейной системы* E.

Линейная система E называется *конечномерной*, если ее размерность есть натуральное число n. В этом случае алгебраический базис состоит из n элементов. В случае бесконечного χ линейная система E называется *бесконечномерной*.

3. Линейные многообразия и выпуклые множества. Непустое подмножество M линейной системы E называется *линейным многообразием*, если линейная комбинация $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ любых двух элементов x_1, x_2 из множества M также принадлежит M.

Пусть S и T — два подмножества линейной системы E; под *алгебраической суммой* $S \dot{+} T$ множеств S и T понимается множество, состоящее из всех элементов вида $x+y$, где $x \in S$ и $y \in T$. Два линейных многообразия M и N из E называются *алгебраически дополнительными*, если $M \cap N = \theta$ и $M \dot{+} N = E$. Для всякого линейного многообразия M линейной системы E существует алгебраически дополнительное линейное многообразие N.

Под *отрезком*, определяемым элементами x и y линейной системы, понимается совокупность всех элементов вида $\alpha x + (1-\alpha) y$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Множество S линейной системы E называется *выпуклым*, если оно целиком содержит отрезок, определяемый любыми двумя его элементами. Простейший пример выпуклого множества представляет собой любое линейное многообразие $M \subset E$.

Для произвольного множества $S \subset E$ существует наименьшее выпуклое множество $\tilde{S}$, содержащее S, называемое *выпуклой оболочкой множества* S. Выпуклая оболочка $\tilde{S}$ состоит из всевозможных элементов вида

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k,$$

где $\alpha_k \geqslant 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$, $x_k \in S$, n — любое натуральное число.

§ 2. Линейные топологические, метрические, нормированные и банаховы пространства

1. *Линейное топологическое пространство.* Линейное топологическое пространство является сложной структурой. Порождающие ее структуры — линейная система и топологическое пространство. В понятии топологического пространства отражены свойства, связанные с интуитивными понятиями окрестности, предела и непрерывности в обычном евклидовом пространстве. В линейном топологическом пространстве обе структуры связаны между собой. Эта связь отражает свойства непрерывности алгебраических операций над векторами в евклидовом пространстве.

В функциональном анализе в основном изучаются бесконечномерные линейные топологические пространства, которые наряду со свойствами, общими с евклидовым пространством, имеют ряд качественно новых свойств.

Пусть E — линейная система, наделенная отделимой (хаусдорфовой) топологией, задаваемой системой окрестностей $\{V_x\}$ (см. [5]). Множество E называется *линейным топологическим пространством*, если алгебраические операции непрерывны в топологии E, т. е.:

1) для каждой пары элементов x, $y \in E$ и окрестности V_{x+y} элемента $x+y$ найдутся окрестность V_x элемента x и окрестность V_y элемента y такие, что

$$V_x \dot{+} V_y \subset V_{x+y};$$

2) каковы бы ни были элемент $x \in E$, число λ и окрестность $V_{\lambda x}$ элемента λx, найдутся окрестность V_x элемента x и число $\delta > 0$ такие, что

$$\mu V_x \subset V_{\lambda x} \text{ при } |\mu - \lambda| < \delta.$$

В линейном топологическом пространстве задание системы $\{V_\theta^{(\alpha)}\}$ окрестностей нуля полностью определяет топологию этого пространства — любая окрестность $V_x^{(\alpha)}$ элемента x получается из некоторой окрестности нуля $V_\theta^{(\alpha)}$ путем ее «сдвига» на элемент x:

$$V_x^{(\alpha)} = x \dot{+} V_\theta^{(\alpha)}.$$

Простейшим примером линейного топологического пространства является конечномерное евклидово пространство R_n с обычной топологией.

Другие примеры линейных топологических пространств.

а) В линейную систему Λ всех комплексных последовательностей (см. пример б) § 1) топологию вводят с помощью системы окрестностей следующим образом: окрестностью элемента $x_0 = \{\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0, \ldots\}$ называется совокупность элементов $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$, координаты которых удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\xi_n^0 - \xi_n|}{1 + |\xi_n^0 - \xi_n|} < \varepsilon,$$

где ε — некоторое положительное число. Линейная система Λ, наделенная этой топологией, становится линейным топологическим пространством, которое обозначается через s.

б) Линейную систему $C(0, 1)$ непрерывных на отрезке числовых функций (см. пример в) § 1) можно превратить в линейное топологическое пространство, введя систему окрестностей: окрестностью функции $x_0(t) \in C(0, 1)$ называется совокупность всех функций $x(t) \in C(0, 1)$, для которых $|x_0(t) - x(t)| < \varepsilon$ при всех $t \in [0, 1]$ и некотором $\varepsilon > 0$.

Элемент x_0 называется *предельной точкой* для множества S топологического пространства E, если всякая окрестность x_0 содержит элемент из множества S. Множество всех предельных точек множества S называют *замыканием* множества S и обозначают $\overline{S}$.

Последовательность $\{x_n\}$ элементов топологического пространства E называется *сходящейся* к элементу x_0, если для любой окрестности V_{x_0} элемента x_0 найдется такое натуральное число N, что $x_n \in V_{x_0}$ при всех $n > N$.

Следует отметить, что в линейном топологическом пространстве замыкание множества S не всегда совпадает с множеством пределов всевозможных сходящихся последовательностей элементов из S. Однако для ряда частных видов линейных топологических пространств, например для линейных метрических и нормированных пространств, замыкание множества совпадает с совокупностью пределов всех сходящихся последовательностей элементов из этого множества.

Если замыкание множества S совпадает со всем топологическим пространством E, то множество S называется *всюду плотным*.

2. Локально выпуклое пространство. Множество $\Gamma = \{V_x^{(\alpha)}\}$ окрестностей элемента x называется *фундаментальной системой окрестностей* этого элемента, если всякая окрестность x содержит окрестность из множества Γ.

Линейное топологическое пространство E называется *локально выпуклым*, если оно обладает фундаментальной системой окрестностей нуля, каждая из которых выпукла.

Пространства R_n, $C(0, 1)$ и s локально выпуклы.

Конечную числовую неотрицательную функцию $p(x)$, определенную на линейной системе E, называют *полунормой*, если она обладает следующими свойствами:

1) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ для всех $x \in E$ и λ;

2) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ для всех x, $y \in E$.

Если на линейной системе E задано некоторое семейство полунорм Γ, то на E можно определить (не обязательно отделимую) локально выпуклую топологию, принимая за фундаментальную систему окрестностей нуля семейство выпуклых множеств, определяемых соотношениями вида $p(x) < \varepsilon$, где p пробегает Γ, а ε — множество всех положительных чисел. Эта топология будет отделимой тогда и только тогда, когда для каждого элемента $x_0 \neq \theta$ $(x \in E)$ найдется полунорма $p \in \Gamma$ такая, что $p(x_0) \neq 0$.

Каждая локально выпуклая топология в линейной системе E может быть задана указанным способом с помощью некоторого семейства полунорм.

3. Линейное метрическое пространство. Важным частным случаем топологического пространства является метрическое пространство.

Множество E называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов x, y поставлено в соответствие действительное число $\varrho(x, y)$ — *расстояние* между элементами x и y, — удовлетворяющее условиям (аксиомам):

1) $\varrho(x, y) \geqslant 0$; $\varrho(x, x) = 0$, и если $\varrho(x, y) = 0$, то $x = y$;

2) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ (аксиома симметрии);

3) $\varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$ $(z \in E)$ (неравенство треугольника).

Элементы метрического пространства называются также точками; если введением расстояния множество E превращается в метрическое пространство, то говорят, что в множестве E *введена метрика* или также что множество E *метризовано*.

Если $x_n \in E$, $x \in E$ и $\varrho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$, то говорят, что x_n *сходятся* к x:

$$x_n \to x.$$

Расстоянием между множествами A и B метрического пространства называется $\inf\limits_{x \in A,\, y \in B} \varrho(x, y)$.

Линейная система E называется *линейным метрическим пространством*, если она метризована, причем так, что алгебраические операции непрерывны в метрике E, т. е.:

1) из того, что $x_n \to x$, $y_n \to y$, следует

$$x_n + y_n \to x + y;$$

2) если $x_n \to x$, $\lambda_n \to \lambda$, то $\lambda_n x_n \to \lambda x$.

Пример линейного метрического пространства. В линейном топологическом пространстве s (см. пример а) п. 1) можно ввести расстояние между элементами $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ и $y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots\}$ с помощью формулы

$$\varrho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|}.$$

Метрика в множестве E *порождает (индуцирует)* в нем естественным образом топологию: если принять за окрестности $V_{x_0}^{(\varepsilon)}$ $(0 < \varepsilon < \infty)$ точки x_0 совокупности всех элементов $y \in E$ таких, что $\varrho(x_0, y) < \varepsilon$ при заданном $\varepsilon > 0$, то множество E становится топологическим пространством.

Топологическое пространство E называется *метризуемым*, если в нем можно ввести метрику так, что топология, индуцируемая в E этой метрикой, совпадает с исходной топологией топологического пространства E.

Справедлив следующий критерий метризуемости линейных локально выпуклых топологических пространств: *для того чтобы локально выпуклое линейное топологическое пространство было метризуемым, необходимо и достаточно, чтобы его топологию можно было задать счетным множеством полунорм.*

Пример. В теории обобщенных функций большую роль играет пространство D всевозможных бесконечно дифференцируемых функций $x(t)$, обращающихся в нуль вне некоторого промежутка (своего для каждой функции). Локально выпуклая топология в D вводится с помощью системы полунорм

$$p_n(x) = \sup_{-\infty < t < \infty} |x^{(n)}(t)|.$$

Пространство D является метризуемым линейным топологическим пространством.

Важные примеры неметризуемых линейных топологических пространств будут приведены ниже (см. § 4, п. 3).

4. Линейное нормированное пространство. В геометрии, анализе, а также ряде других разделов математики, кроме понятия алгебраических операций, большую роль играет понятие «длины» или нормы вектора.

Линейная система E называется *линейным нормированным пространством*, если каждому элементу $x \in E$ поставлено в соответствие вещественное число $\|x\| \geqslant 0$, называемое *нормой элемента* x, причем соблюдены следующие условия (аксиомы линейного нормированного пространства):

1) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (однородность нормы);

3) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Говорят, что два линейных нормированных пространства E и F *изометричны*, если существует взаимно однозначное соответствие $x \leftrightarrow y$ между элементами x и y ($x \in E$, $y \in F$), удовлетворяющее следующим условиям:

1) если $x_1 \leftrightarrow y_1$, $x_2 \leftrightarrow y_2$, то и

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \leftrightarrow \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

для любых чисел λ_1, λ_2;

2) если $x \leftrightarrow y$, то $\|x\| = \|y\|$.

Линейные нормированные пространства называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное сответствие $x \leftrightarrow y$ ($x \in E$, $y \in F$) между их элементами такое, что

1) из $x_1 \leftrightarrow y_1$ и $x_2 \leftrightarrow y_2$ следует $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \leftrightarrow \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$;

2) существуют такие постоянные $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, не зависящие от элементов x и y, что если $x \leftrightarrow y$, то

$$C_1 \|y\| \leqslant \|x\| \leqslant C_2 \|y\|.$$

При изометрии сохраняются все свойства пространства, связанные с алгебраическими операциями и нормой элементов, так что различия между изометричными пространствами могут быть лишь только в природе их элементов. В абстрактном функциональном анализе, при изучении линейных нормированных пространств, интересуются как раз теми свойствами пространства, которые связаны с особенностью алгебраических операций и нормы этого пространства, и вовсе не исследуют природу самих элементов. Поэтому изометрические линейные нормированные пространства просто отождествляются. В приложениях функционального анализа обычно приходится иметь дело с конкретными линейными нормированными пространствами, в которых игнорировать природу элементов нельзя. Перевод всех полученных фактов с «языка» одного пространства на «язык» изометричного ему пространства часто является практически неосуществимым. В этом случае отождествление изометричных пространств является нерациональным.

Величина

$$\varrho(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\|$$

обладает всеми свойствами метрики, поэтому линейные нормированные пространства представляют собой частный вид метрических пространств, а значит, и топологических пространств. При изоморфизме двух линейных нормированных пространств сохраняются лишь те свойства, которые зависят от природы алгебраических операций и топологической структуры этих пространств.

Так как линейное нормированное пространство является топологическим пространством, то в нем определяются понятия предела последовательности, замыкания множества, окрестности и др. Ввиду того, что основным объектом в дальнейшем будут линейные нормированные пространства, здесь формулируются все эти понятия непосредственно в терминах линейных нормированных пространств.

Последовательность $\{x_n\}$ элементов линейного нормированного пространства E называется ***сходящейся к элементу*** x_0, если $\|x_0 - x_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Открытым (замкнутым) *шаром* $S(x_0, r)$ *радиуса* $r>0$ с *центром* в точке x_0 называется множество всех точек $x \in E$ таких, что $\|x_0 - x\| < r$ ($\|x_0 - x\| \leqslant r$).

Под *окрестностью* точки x_0 понимается всякое подмножество $V_{x_0} \subset E$, содержащее открытый шар некоторого радиуса с центром в точке x_0.

Элемент x_0 называется *предельной точкой* для множества $T \subset E$, если всякая окрестность x_0 содержит элементы из множества T. Для того чтобы элемент x_0 был предельной точкой множества T, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{x_n\} \subset T$, сходящаяся к x_0.

Множество $T \subset E$ называется *замкнутым*, если все предельные точки T принадлежат T.

Множество $T \subset E$ называется *открытым*, если каждая его точка *внутренняя*, т. е. содержится в T вместе с некоторой окрестностью. (Иначе говоря, если для любой точки $x_0 \in T$ при некотором $r>0$ будет $S(x_0, r) \subset T$.)

Шар $S(x_0, r)$ радиуса r с центром в точке x_0 является выпуклым множеством; кроме того, из определения окрестности точки x_0 вытекает, что шары $S(x_0, r)$ образуют фундаментальную систему окрестностей точки x_0, когда r пробегает множество всех положительных действительных чисел. Отсюда следует, что линейное нормированное пространство является локально выпуклым линейным топологическим пространством.

Замкнутой выпуклой оболочкой множества T линейного нормированного пространства E называется наименьшее замкнутое выпуклое множество из E, содержащее множество T.

Линейное топологическое пространство E называется *нормируемым*, если в E можно ввести норму так, что топология, которую индуцирует эта норма в множестве E, совпадает с исходной топологией пространства E.

Естественно возникает вопрос: при каких условиях линейное топологическое пространство E является нормируемым? Ответ формулируется с помощью понятия ограниченного множества в линейном топологическом пространстве. Множество $V \subset E$ называется *ограниченным*, если для любой последовательности элементов $x_n \in V$ и любой числовой последовательности $\lambda_n \to 0$ последовательность элементов $\{\lambda_n x_n\}$ сходится к нулю.

Для того чтобы линейное топологическое пространство было нормируемым, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовала выпуклая ограниченная окрестность нуля (А. Н. Колмогоров).

Пространства s и D дают примеры ненормируемых линейных топологических пространств.

Замкнутое линейное многообразие M линейного нормированного пространства называют *линейным подпространством*. Всякое конечномерное линейное многообразие M замкнуто и является потому линейным подпространством.

Всякое линейное многообразие M в линейном нормированном пространстве E является само линейным нормированным пространством относительно нормы пространства E.

Говорят, что пространство E разложено в *прямую сумму* своих подпространств M_1 и M_2, $E = M_1 \oplus M_2$, если любой элемент $x \in E$ допускает единственное представление $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$.

5. Примеры линейных нормированных пространств.

1. Евклидово пространство R_n. Пусть E_n — линейная система, состоящая из всевозможных n-мерных векторов $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$. В E_n можно ввести норму по формуле

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}.$$

Линейная система E_n с этой нормой называется *евклидовым пространством* R_n. Неравенство треугольника (3-я аксиома) следует из известного неравенства Минковского для конечных сумм

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |\xi_i + \eta_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \quad (p \geqslant 1)$$

при $p = 2$.

2. Пространство m_n. Для вектора $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ из E_n можно определить норму другим образом:

$$\|x\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|.$$

Линейная система E_n с этой нормой называется *пространством* m_n.

В пространстве E_n можно вводить норму различными способами, но все получаемые при этом нормированные пространства изоморфны.

3. Пространства $l_p (p \geqslant 1)$. Элементами пространства l_p $(p \geqslant 1)$ являются все такие числовые последовательности $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$, для которых сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p$.

Из неравенства Минковского следует, что l_p образует линейную систему. После введения нормы

$$\|x\| = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

l_p становится линейным нормированным пространством.

4. Пространство m. Пусть m — множество, состоящее из всевозможных ограниченных последовательностей $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$. Если положить

$$\|x\| = \sup_i |\xi_i|,$$

то m становится линейным нормированным пространством.

5. Пространство c. Из пространства m выделяется пространство c, элементами которого являются все сходящиеся последовательности. Норма в c определяется так же, как и в m. Пространство c является линейным подпространством пространства m.

6. Пространство c_0. Линейное подпространство пространства c, состоящее из всех последовательностей, сходящихся к нулю, называется *пространством* c_0.

7. Пространство $L_p(0, 1)$. Аналогом пространства l_p среди функциональных пространств является пространство $L_p(0, 1)$ $(p \geqslant 1)$, состоящее из всех функций *), суммируемых с p-й степенью в промежутке $[0, 1]$, т. е. таких измеримых функций $x(t)$, что

$$\int_0^1 |x(t)|^p \, dt < \infty.$$

---

*) В пространствах L_p, а также в пространствах M и L_M^* (см. примеры 10 и 14) функции, совпадающие друг с другом почти всюду на $[0, 1]$, отождествляются.

Из интегрального неравенства Минковского

$$\left[\int_0^1 |x(t)+y(t)|^p\,dt\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\int_0^1 |x(t)|^p\,dt\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_0^1 |y(t)|^p\,dt\right]^{\frac{1}{p}}$$

следует, что $L_p(0,\ 1)$ становится нормированным, если положить

$$\|x\| = \left[\int_0^1 |x(t)|^p\,dt\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Сходимость в $L_p(0,\ 1)$ является сходимостью в среднем с показателем p. Именно, $x_n \to x_0$ означает, что

$$\int_0^1 |x_n(t)-x_0(t)|^p\,dt \to 0.$$

8. Пространство $C(0,\ 1)$. В линейной системе $C(0,\ 1)$ (см. § 1, в)), состоящей из всех непрерывных на отрезке $[0,\ 1]$ функций, норма функции $x(t)$ определяется следующим образом:

$$\|x\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|.$$

Расстояние между двумя функциями

$$\varrho(x,\ y) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)-y(t)|$$

есть максимальное расстояние между их графиками. Сходимость последовательности $\{x_n\}$ точек пространства $C(0,\ 1)$ к точке x_0 означает равномерную сходимость последовательности функций $x_n(t)$ к функции $x_0(t)$.

9. Пространство $C^{(l)}(0,\ 1)$. Элементами этого пространства являются всевозможные функции, определенные на отрезке $[0,\ 1]$ и имеющие на этом отрезке непрерывные производные до l-й включительно. Алгебраические операции — операции сложения и умножения функции на число — определяются обычным образом. Норму элемента $x(t) \in C^{(l)}(0,\ 1)$ можно определить по формуле

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{l} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x^{(k)}(t)| \qquad (x^{(0)}(t) \equiv x(t)).$$

Сходимость в $C^{(l)}(0, 1)$ означает равномерную сходимость как последовательности самих функций, так и последовательностей их производных k-го порядка ($k=1, 2, \ldots, l$).

10. Пространство $M(0, 1)$. Еще один пример функционального линейного нормированного пространства представляет множество $M(0, 1)$ всех измеримых и ограниченных почти всюду на отрезке $[0, 1]$ функций $x(t)$, в котором алгебраические операции определяются обычным образом, а норма определяется равенством

$$\|x\| = \operatorname{vrai}\max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)| = \inf_{mE=0} \Big\{ \sup_{t\in[0,1]/E} |x(t)| \Big\}.$$

Сходимость в $M(0, 1)$ есть равномерная сходимость почти всюду.

11. Пространство $V(0, 1)$. Пусть $x(t)$ — конечная функция, заданная на отрезке $[0, 1]$. Рассмотрим произвольное разбиение τ отрезка $[0, 1]$ $(0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1)$ и образуем выражение

$$v_\tau = \sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})|.$$

Если совокупность сумм v_τ, отвечающих всевозможным подразделениям τ отрезка $[0, 1]$, ограничена, то функция $x(t)$ называется функцией *ограниченной вариации* на отрезке $[0, 1]$, а величина

$$\bigvee_0^1 (x) = \sup_\tau v_\tau$$

называется *полной вариацией* функции $x(t)$.

Пусть $V(0, 1)$ — множество всех функций ограниченной вариации. Если в множестве $V(0, 1)$ ввести обычным образом алгебраические операции, то оно станет линейной системой; если, кроме того, положить для $x\in V(0, 1)$

$$\|x\| = |x(0)| + \bigvee_0^1 (x);$$

то $V(0, 1)$ становится линейным нормированным пространством.

12. Пространство $C(-\infty, \infty)$. Так называют пространство, элементами которого являются непрерывные и огра-

ниченные на всей числовой прямой функции. Норма $x(t)$ в $C(-\infty, \infty)$ вводится формулой

$$\|x\| = \sup_{-\infty<t<\infty} |x(t)|.$$

Сходимость последовательности в $C(-\infty, \infty)$ означает равномерную сходимость на всей числовой прямой.

13. Пространство Гёльдера $C_\alpha(0, 1)$. Пусть $C_\alpha(0, 1)$ — множество всех функций $x(t)$, заданных на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющих *условию Гёльдера* (или *Липшица*) с показателем α $(\alpha > 0)$:

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant C|t_1 - t_2|^\alpha \quad (t_1, t_2 \in [0, 1]).$$

Норма $x(t) \in C_\alpha(0, 1)$ определяется с помощью формулы

$$\|x\| = |x(0)| + \sup_{t_1, t_2 \in [0, 1]} \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha}.$$

14. Пространства Орлича $L_M^*(0, 1)$. Пространства Орлича являются обобщением пространств $L_p(0, 1)$. Функцию $M(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ называют *N-функцией*, если она представима в виде

$$M(x) = \int_0^{|x|} p(\tau)\, d\tau,$$

где $p(\tau)$ — положительная при $t > 0$, непрерывная справа неубывающая функция, удовлетворяющая условиям

$$p(+0) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\tau\to\infty} p(\tau) = \infty.$$

Классом Орлича $L_M(0, 1)$ называют совокупность измеримых на $[0, 1]$ функций $x(t)$, для которых

$$\varrho_M(x) = \int_0^1 M(x(t))\, dt < \infty.$$

Всевозможные линейные комбинации функций из класса $L_M(0, 1)$ образуют линейную систему $L_M^*(0, 1)$.

Для введения нормы в $L_M^*(0, 1)$ обозначают

$$q(\sigma) = \sup_{p(\tau)\leqslant\sigma} \tau \quad \text{и} \quad N(y) = \int_0^{|y|} q(\sigma)\, d\sigma.$$

Если $q(+0)=0$, то $N(y)$ является N-функцией и называется *дополнительной* к $M(x)$. Норму в $L^*_M(0, 1)$ определяют по формуле

$$\|x\|_M = \sup \left| \int_0^1 x(t)\, y(t)\, dt \right|,$$

где supremum берется по всем $y \in L^*_N(0, 1)$, для которых

$$\varrho_N(y) = \int_0^1 N(y(t))\, dt = 1.$$

Полученное линейное нормированное пространство и называется *пространством Орлича* $L^*_M(0, 1)$.

Если $M(x) = \frac{|x|^p}{p}$, то $L^*_M(0, 1) = L_p(0, 1)$.

Выше для простоты были приведены примеры функциональных пространств, состоящих из функций, определенных на отрезке $[0, 1]$. Аналогично определяются пространства $L_p(Q)$, $L^*_M(Q)$ и $M(Q)$ функций, заданных на множестве Q с абсолютно аддитивной мерой; пространство $C(Q)$ непрерывных ограниченных функций на топологическом пространстве Q; пространства $C^l(G)$ и $C_\alpha(G)$ функций, определенных в области G n-мерного евклидова пространства.

6. Полнота метрических пространств, банахово пространство. Последовательность точек $\{x_n\}$ метрического пространства E называется *фундаментальной* (или *сходящейся в себе*), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $\varrho(x_m, x_n) < \varepsilon$ при $m, n \geqslant N$.

Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна, однако обратное утверждение, вообще говоря, неверно. В самом деле, пусть в метрическом пространстве R, состоящем из рациональных чисел с метрикой $\varrho(x, y) = |x - y|$, последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому иррациональному числу. Последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в метрике R, однако в R не существует элемента, который бы являлся ее пределом.

Если в метрическом пространстве E каждая фундаментальная последовательность сходится к некоторому элементу того же пространства, то E называется *полным пространством.*

Полное линейное нормированное пространство называется *банаховым пространством.*

В терминах нормы тот факт, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, означает, что $\|x_n - x_m\| \xrightarrow[m,\, n \to \infty]{} 0$. Поэтому условие полноты линейного нормированного пространства E выглядит так: из того, что $\|x_m - x_n\| \xrightarrow[m,\, n \to \infty]{} 0$, вытекает существование такого $x_0 \in E$, что $\|x_n - x_0\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Все нормированные пространства, описанные в примерах 1—14, являются полными, а поэтому—банаховыми пространствами.

Любое конечномерное линейное нормированное пространство полно и, следовательно, является банаховым. Бесконечномерное банахово пространство имеет размерность не меньше континуума.

В банаховом пространстве справедлив принцип вложенных стягивающихся шаров: *пусть дана последовательность вложенных друг в друга шаров, радиусы которых стремятся к нулю, тогда эти шары имеют единственную общую точку.*

Этот принцип играет важную роль при доказательстве различных теорем существования. В неполных пространствах этот принцип несправедлив, в связи с чем ряд теорем существования в таких пространствах не имеет места.

Аналогично тому, как множество рациональных чисел пополняется до множества всех вещественных чисел, всякое метрическое пространство может быть расширено до полного пространства.

Пополнением $\overline{E}$ метрического пространства E называется полное метрическое пространство, содержащее E в качестве всюду плотного подмножества. Всякое метрическое пространство обладает пополнением.

Приведем пример.

15. Пространство $W_p^l(G)$. Пусть G—область в n-мерном пространстве и $C^{(l)}(G)$—линейная система всех l раз непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$ в области G.

В норме, которая определяется равенством

$$\|x\| = \left\{\int\limits_G |x(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int\limits_G \left[\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=l} \left(\frac{\partial^l x}{\partial t_1^{k_1} \partial t_2^{k_2} \ldots \partial t_n^{k_n}}\right)^2\right]^{\frac{p}{2}} dt\right\}^{\frac{1}{p}},$$

пространство $C^{(l)}(G)$ не полно. Пополнение этого пространства называется *пространством* $W_p^l(G)$. Элементы, присоединяемые к $C^l(G)$ при его пополнении, могут быть отождествлены с функциями, определенными почти всюду в G и имеющими обобщенные производные порядка l, суммируемые с p-й степенью. Пространства $W_p^l(G)$ были введены С. Л. Соболевым и играют важную роль в различных задачах теории уравнений в частных производных.

7. Компактные множества. Множество T в метрическом пространстве E называется *компактным*, если из всякой бесконечной последовательности $\{x_n\} \subset T$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому пределу $x \in E$.

Критерий компактности. *Для компактности множества T метрического пространства E необходимо, а в случае полноты E и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала конечная ε-сеть, т. е. такое конечное множество элементов $x_1, \ldots, x_n \in E$, что для каждого элемента $x \in T$ найдется элемент x_k, находящийся от x на расстоянии меньше ε:*

$$\varrho(x, x_k) < \varepsilon.$$

В линейном нормированном пространстве компактность множества означает, что его можно с любой точностью приблизить множеством, лежащим в конечномерном подпространстве.

Полезными являются утверждения: если множество компактно, то его выпуклая оболочка также компактна; замыкание компактного множества компактно.

В конечномерном банаховом пространстве всякое ограниченное множество компактно. *Линейное нормированное про-*

странство, в котором какой-либо шар компактен, является конечномерным.

Признаки компактности.

1) Компактность в $C(0, 1)$. *Для компактности множества $T \subset C(0, 1)$ необходимо и достаточно, чтобы функции $x(t) \in T$ были равномерно ограничены и равностепенно непрерывны* (критерий Арцела). При этом равномерная ограниченность означает, что существует константа K такая, что $|x(t)| \leqslant K$ для всех $x(t) \in T$, а равностепенная непрерывность означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ для любых $t_1, t_2 \in [0, 1]$ при $|t_1 - t_2| < \delta$ и для любой функции $x(t) \in T$.

2) Компактность в $C(-\infty, \infty)$. *Для компактности множества $T \subset C(-\infty, \infty)$ необходимо и достаточно, чтобы функции $x(t)$ были равномерно ограничены и чтобы для каждого ε существовало покрытие оси $(-\infty, \infty)$ конечным числом открытых множеств, в каждом из которых колебание любой функции $x(t) \in T$ меньше ε.*

3) Компактность в $L_p(0, 1)$ $(p \geqslant 1)$. *Для компактности множества $T \subset L_p(0, 1)$ необходимо и достаточно, чтобы это множество было ограничено в $L_p(0, 1)$ и чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $\delta > 0$ такое, что при $h < \delta$ для любой функции $x(t) \in T$ расстояние $\varrho(x, x_h) < \varepsilon$, где*

$$x_h(t) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} x(\tau)\, d\tau$$

(вне отрезка $[0, 1]$ функция $x(t)$ полагается равной нулю) (критерий А. Н. Колмогорова).

4) Другой признак компактности в $L_p(0, 1)$ $(p \geqslant 1)$. *Для компактности множества $T \subset L_p(0, 1)$ необходимо и достаточно, чтобы это множество было ограниченным в $L_p(0, 1)$ и чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $\delta > 0$ такое, что*

$$\int_0^1 |x(t+h) - x(t)|^p\, dt < \varepsilon$$

при $|h| < \delta$ (критерий М. Рисса).

5) Компактность в l_p $(p \geqslant 1)$. *Для компактности некоторого множества $T \subset l_p$ необходимо и достаточно, чтобы T было ограниченным и чтобы для произвольного $\varepsilon > 0$ существовал номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\} \in T$ имеет место неравенство $\sum\limits_{i=N}^{\infty} |\xi_i|^p < \varepsilon$.*

В последние годы усиленно изучались количественные характеристики «массивности» компактных множеств. Через $N_\varepsilon(T)$ обозначают минимальное число точек во всевозможных ε-сетях множества T. Число

$$H_\varepsilon(T) = \log_2 N_\varepsilon(T)$$

называется *ε-энтропией* множества T.

Название это связано с идеями теории информации. Энтропия множества сообщений при передаче с определенной точностью есть число двоичных знаков, требуемых для восстановления с этой точностью любого сообщения.

Если считать компактное множество T множеством сообщений, а под воспроизведением точки x из T с нужной точностью понимать указание некоторой точки x' из ε-окрестности точки x, то оба понятия энтропии приобретают аналогичный смысл.

Другой количественной характеристикой «массивности» T является *ε-емкость*. Она определяется формулой

$$C_\varepsilon(T) = \log_2 M_\varepsilon(T),$$

где $M_\varepsilon(T)$ — максимальное число точек с взаимными расстояниями больше ε, которое можно разместить в компактном множестве T. С помощью ε-емкости можно оценивать снизу ε-энтропию, так как

$$M_{2\varepsilon}(T) \leqslant N_\varepsilon(T).$$

Для ряда важных классов компактных множеств имеются асимптотические оценки ε-энтропии при $\varepsilon \to 0$.

Для куба Q в n-мерном пространстве E_n

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{H_\varepsilon(Q)}{\log_2 \frac{1}{\varepsilon}} = n.$$

В пространстве $C(G)$, где G — замкнутая ограниченная n-мерная область с гладкой границей, рассматривается компактное множество $V_{l,\alpha}(C_1, C_2)$, состоящее из всех функций, имеющих частные производные порядка l, удовлетворяющие условию Гёльдера, и таких, что производные до порядка l ограничены числом C_1, а константы Гёльдера l-х производных — числом C_2. Тогда

$$\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{l+\alpha}} \leqslant H_\varepsilon(V_{l,\alpha}(C_1, C_2)) \leqslant \beta\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{l+\alpha}},$$

где α и β не зависят от ε.

Значительно менее массивными в $C(G)$ являются множества аналитических функций. Если через $A_Q(C_1)$ обозначить множество всех функций из $C(G)$, допускающих аналитическое продолжение в фиксированную область Q n-мерного пространства и остающихся в ней ограниченными некоторым числом C_1, то

$$\alpha \log_2^{n+1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \leqslant H_\varepsilon(A_Q(C_1)) \leqslant \beta \log_2^{n+1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

8. Сепарабельные пространства. Линейное нормированное пространство называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное множество.

Пространства R_n, l_p, c, c_0, $L_p(0, 1)$, $C(0, 1)$, $C^{(l)}(0, 1)$, $\mathring{W}_p^{(l)}(G)$ сепарабельны, в то время как пространства m, $M(0, 1)$, $V(0, 1)$, $C_\alpha(0, 1)$ дают примеры несепарабельных пространств.

Пространство $C(0, 1)$ обладает следующим свойством универсальности: *всякое сепарабельное линейное нормированное пространство изометрично некоторому подпространству пространства* $C(0, 1)$.

§ 3. Линейные функционалы

1. Понятие линейного функционала. Гиперплоскость. Пусть E — вещественная (или комплексная) линейная система. Если каждому элементу $x \in E$ поставлено в соответствие некоторое вещественное (комплексное) число $f(x)$, то говорят, что на E определен *функционал* $f(x)$.

Функционал $f(x)$ называется *линейным*, если

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \qquad (x, y \in E).$$

Гиперплоскостью L линейной системы E называется линейное многообразие, дополнение к которому одномерно.

Если $f(x)$ — линейный функционал, то совокупность элементов, для которых $f(x)=0$, образует гиперплоскость. Наоборот, всякая гиперплоскость имеет уравнение $f(x)=0$, где $f(x)$ — линейный функционал.

2. Непрерывные линейные функционалы. Функционал $f(x)$, определенный на линейном нормированном пространстве E, называется ***непрерывным*** в точке $x_0 \in E$, если $f(x_n) \to f(x_0)$ при $x_n \to x_0$.

Функционал $f(x)$ называется ***непрерывным линейным функционалом***, если он одновременно является линейным и непрерывным на E.

Из непрерывности линейного функционала в одной точке следует его непрерывность всюду.

Говорят, что линейный функционал *ограничен на* E, если существует такое неотрицательное число c, что для всех $x \in E$

$$|f(x)| \leqslant c \, \| x \|.$$

Наименьшее из чисел c, удовлетворяющее этому неравенству, называется ***нормой*** ограниченного линейного функционала $f(x)$ и обозначается $\|f\|$. Справедлива формула

$$\|f\| = \sup_{x \in E} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

Понятия линейного непрерывного функционала и ограниченного линейного функционала оказываются эквивалентными: ***для того чтобы линейный функционал $f(x)$ был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограниченным.***

Для того чтобы линейный функционал $f(x)$ был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы определяемая им гиперплоскость $L_f = \{x\colon\ f(x)=0\}$ была подпространством (замкнутым!) линейного нормированного пространства E. Для непрерывного линейного функционала справедлива формула

$$\varrho(x, L_f) = \frac{|f(x)|}{\|f\|} \quad (x \in E),$$

где $\varrho(x, L_f)$ — расстояние от точки x до подпространства L_f, равное $\inf \|x-y\|$, когда y пробегает все L_f. Эта формула аналогична известной формуле аналитической геометрии для расстояния от точки до плоскости.

Если линейный функционал $f(x)$, определенный на всем пространстве E, не является непрерывным функционалом, то гиперплоскость L_f всюду плотна в пространстве E.

3. Продолжение линейных непрерывных функционалов. Пусть $f(x)$ — линейный функционал, определенный на линейном многообразии M линейной системы E. Линейный функционал $\bar{f}(x)$, определенный на всем пространстве E, называется *продолжением функционала* $f(x)$, если $\bar{f}(x) = f(x)$ для всех $x \in M$.

Фундаментальным является следующее утверждение.

Теорема Хана — Банаха. *Пусть $p(x)$ — полунорма на линейной системе E, M — линейное многообразие в E и f — линейный функционал на M такой, что $|f(x)| \leqslant p(x)$ для всех $x \in M$. Тогда существует продолжение $\bar{f}$ функционала f на все E такое, что $|\bar{f}(x)| \leqslant p(x)$ для всех $x \in E$.*

Для линейных нормированных пространств сформулированная теорема приводит к таким следствиям:

1. Если на пространстве M, являющемся линейным многообразием в линейном нормированном пространстве E, задан непрерывный линейный функционал $f(x)$, то существует непрерывный линейный функционал $\bar{f}(x)$, являющийся продолжением $f(x)$ на все пространство E и такой, что норма его равна норме функционала $f(x)$:

$$\|\bar{f}\| = \|f\|.$$

2. Каков бы ни был отличный от нулевого элемент x_0 линейного нормированного пространства E, существует линейный непрерывный функционал $f(x)$ на E такой, что

$$\|f\| = 1 \quad \text{и} \quad f(x_0) = \|x_0\|.$$

3. Пусть T — непустое выпуклое открытое множество в линейном нормированном пространстве E и M — линейное многообразие, не пересекающееся с T. Существует замкнутая гиперплоскость, содержащая M и не пересекающаяся с T.

4. Примеры линейных функционалов. Математический анализ дает много примеров линейных функционалов. Функционал

$$f(x)=\sum_{k=1}^{N} a_k\xi_k$$

является непрерывным линейным функционалом на пространствах l_p, m, c, c_0, элементами которых являются последовательности $x=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$.

Если последовательность $\{a_n\}$ ограничена, то функционал

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k\xi_k$$

будет непрерывным линейным функционалом на пространстве l_1. Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|<\infty$, то этот линейный функционал непрерывен и на пространствах l_p и m, а значит, и на подпространствах c, c_0 пространства m.

На пространстве c непрерывным является функционал

$$f(x)=\lim_{k\to\infty}\xi_k.$$

Его норма равна единице.

На функциональных пространствах $L_p(0, 1)$, $M(0, 1)$, $C(0, 1)$ и других примером непрерывного линейного функционала служит определенный интеграл

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\,dt.$$

При этом интеграл Лебега, определенный на $L_1(0, 1)$, можно рассматривать как продолжение функционала, порожденного интегралом Римана на пространстве $C(0, 1)\subset L_1(0, 1)$.

Более общий вид имеет линейный функционал

$$P(x)=\int_0^1 x(t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Если $\varphi(t)$ — ограниченная измеримая функция, то он также непрерывен в пространствах $L_p(0, 1)$, $M(0, 1)$, $C(0, 1)$.

В пространстве $C(0, 1)$ значение функции $x(t)$ в фиксированной точке t_0 будет непрерывным линейным функционалом с нормой, равной единице:

$$f(x) = x(t_0), \qquad \|f\| = 1.$$

Аналогично значение k-й производной $x^{(k)}(t_0)$ в точке t_0 будет непрерывным линейным функционалом в пространстве $C^{(l)}(0, 1)$ при $k \leqslant l$.

Если рассмотреть функционал $x(t_0)$ в пространствах $W_p^{(l)}(G)$, то оказывается, что при $l > \frac{n}{p}$ (n — размерность области G) этот функционал определен на $W_p^l(G)$ и непрерывен. Если же $l < \frac{n}{p}$, то этот функционал, определенный на $C^{(l)}(G)$, не будет непрерывен в норме $W_p^{(l)}(G)$.

Нормы ряда рассмотренных функционалов будут указаны в следующем параграфе.

§ 4. Сопряженные пространства

1. Двойственность линейных систем. *Произведением* $E \times F$ линейных систем E и F называют линейную систему, элементами которой являются всевозможные пары (x, y) $(x \in E,\ y \in F)$, причем алгебраические операции в $E \times F$ вводятся следующим способом:

1) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;

2) $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.

Функционал $B(x, y)$, определенный на $E \times F$, называется *билинейным*, если он линеен относительно каждой из переменных x, y, т. е.

$$B(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 B(x_1, y) + \alpha_2 B(x_2, y),$$
$$B(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 B(x, y_1) + \alpha_2 B(x, y_2).$$

Говорят, что *билинейный функционал $B(x, y)$ приводит линейные системы E и F в двойственность* или что *E и F находятся в двойственности (относительно B)*, если выполнены следующие два условия:

1) для каждого $x \neq \theta$ из E существует $y \in F$ такой, что $B(x, y) \neq 0$;

2) для каждого $y \neq \theta$ из F существует $x \in E$ такой, что $B(x, y) \neq 0$.

Пусть E — линейная система над полем вещественных или комплексных чисел и $\tilde{E}$ — множество всех линейных функционалов $f(x)$, определенных на E. В $\tilde{E}$ можно ввести операции сложения элементов f и g и умножения элемента f на число λ следующим образом:

1) $h=f+g$ есть функционал на E такой, что

$$h(x)=f(x)+g(x) \quad (x \in E),$$

2) $f_1=\lambda f$ (λ — числовой множитель, $f \in \tilde{E}$) означает:

$$f_1(x)=\lambda f(x).$$

Множество $\tilde{E}$ становится при этом линейной системой, которую называют *алгебраическим сопряженным пространством* к пространству E.

Если определить на $E \times \tilde{E}$ билинейный функционал $B(x, f)=f(x)$, то E и $\tilde{E}$ приводятся с помощью этого билинейного функционала в двойственность.

2. Сопряженное пространство к линейному нормированному пространству. Множество E' всех непрерывных линейных функционалов, определенных на линейном нормированном пространстве E, является линейным многообразием алгебраически сопряженного пространства $\tilde{E}$, поскольку сумма двух непрерывных линейных функционалов и произведение непрерывного линейного функционала на число являются непрерывными линейными функционалами. За норму элемента $f \in E'$ принимают норму $\|f\|$ функционала $f(x)$; при этом E' становится линейным нормированным пространством, которое называется *сопряженным пространством* к пространству E.

Пространство E' полно, так что сопряженное пространство к линейному нормированному пространству всегда является банаховым пространством.

Понятие непрерывного линейного функционала для линейных метрических пространств можно определить точно так же, как это сделано для линейных нормированных пространств. Однако здесь нет утверждения типа следствия 2 п. 3 § 3, гарантирующего существование нетривиального непрерывного линейного функционала. Более того, существуют примеры линейных метрических пространств E, для которых сопряженное пространство E' состоит всего лишь из одного непрерывного линейного функционала, тождественно равного нулю на E.

Необходимым и достаточным условием существования нетривиального функционала в E является наличие в E выпуклой окрестности нуля.

Для конкретных линейных нормированных пространств часто возникает задача об описании их сопряженных пространств. Постановку этой задачи следует уточнить. Дело в том, что само определение сопряженного пространства уже дает его описание. В узком смысле под описанием сопряженного пространства понимают указание конкретного банахова пространства, изометричного пространству E', сопряженному к данному пространству E, и способа вычисления значения $f(x)$ функционала $f \in E'$ на элементе $x \in E$. Однако так поставленная задача не имеет определенного ответа, так как конкретные пространства, изометричные пространству E', можно строить различными способами.

Например, пусть в E_n введена норма

$$\|x\| = |\xi_1| + \sum_{k=1}^{n-1} |\xi_{k+1} - \xi_k|.$$

Если линейные функционалы на E_n представлять в виде

$$f(x) = a_1\xi_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k (\xi_{k+1} - \xi_k),$$

то сопряженным пространством к E_n будет пространство E_n^1 с нормой

$$\|f\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |a_k|.$$

Если же линейные функционалы представлять в обычном виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \xi_k,$$

то сопряженным пространством будет пространство E_n^2 с нормой

$$\|f\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left| \sum_{i=k}^{n} b_i \right|.$$

Пространства E_n^1 и E_n^2 изометричны. Соответствие между ними задается соотношением $a_k \leftrightarrow \sum_{i=k}^{n} b_i$.

Задача об описании сопряженного пространства становится определенной, если заранее задаться аналитическим способом вычисления значений функционала или, как говорят, видом функционала. При этом по аналогии с линейными формами линейные функционалы обычно ищут в виде сумм произведений или интегралов от произведений.

Примеры.

1. Пространство l_p $(p > 1)$. Произвольный непрерывный линейный функционал, определенный в пространстве l_p, может быть представлен в виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \xi_i,$$

где $\{f_i\} \in l_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $\|f\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

Пространство, сопряженное к пространству l_p, изометрично пространству l_q, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2. Пространство l_1. Всякий непрерывный линейный функционал в l_1 может быть представлен в виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \xi_i,$$

где $\|f\| = \sup\limits_{1 \leqslant i < \infty} |f_i| < \infty$.

Сопряженное пространство к l_1 изометрично пространству m.

3. Пространство c_0. Линейный непрерывный функционал в c_0 может быть задан равенством

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \xi_i,$$

где $\|f\| = \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| < \infty$.

Сопряженное пространство к c_0 изометрично пространству l_1.

4. Пространство $L_p(0, 1)$, $p > 1$. Любой непрерывный линейный функционал в пространстве $L_p(0, 1)$ может быть представлен в виде

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt,$$

где $\alpha(t) \in L_q(0, 1)$, $q = \frac{p}{p-1}$.

Норма функционала f определяется формулой

$$\|f\| = \left\{ \int_0^1 |\alpha(t)|^q\,dt \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Сопряженное пространство к $L_p(0, 1)$ изометрично пространству $L_q(0, 1)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

5. Пространство $L_1(0, 1)$. Непрерывный линейный функционал в $L_1(0, 1)$ может быть представлен в виде

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt,$$

где $\alpha(t)$ — почти всюду на отрезке $[0, 1]$ ограниченная функция и

$$\|f\| = \operatorname{vrai}\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\alpha(t)|.$$

Сопряженное пространство к пространству $L_1(0, 1)$ изометрично пространству $M(0, 1)$.

6. Пространство $C(0, 1)$. Всякий непрерывный линейный функционал в $C(0, 1)$ может быть представлен в виде интеграла Стилтьеса

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,dg(t),$$

где $g(t)$ — функция ограниченной вариации. Функционал $f(x)$ не изменится, если к функции $g(t)$ добавить любую константу, поэтому полагают $g(0) = 0$. Однако и при этом условии разные функции $g(t)$ могут порождать одинаковые функционалы. Эти функции могут отличаться значениями в точках разрыва, лежащих внутри отрезка $[0, 1]$. Если, например, рассматривать только такие функции $g(t)$, для которых

$$g(t) = \frac{g(t+0)+g(t-0)}{2} \quad \text{при} \quad t \in (0, 1),$$

то соответствие между функционалами $f(x)$ и функциями $g(t)$ становится взаимно однозначным. При этом

$$\|f\| = \overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(g).$$

Сопряженное пространство к пространству $C(0, 1)$ изометрично подпространству $V_0(0, 1)$ пространства $V(0, 1)$, состоящему из всех функций $g(t) \in V(0, 1)$, удовлетворяющих условиям: $g(0) = 0$ и $g(t) = \frac{1}{2}[g(t+0)+g(t-0)]$ при $t \in (0, 1)$.

3. Слабая и ослабленная топологии. В сопряженном пространстве E' к линейному нормированному пространству E, кроме топологии, порожденной метрикой E' (сильной топологии), определяется также так называемая слабая топология. Для каждого $\alpha > 0$ и каждого конечного числа элементов x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ из E обозначают через $W(x_1, \ldots, x_n, \alpha)$ множество всех $f \in E'$ таких, что $|f(x_i)| \leqslant \alpha$. *Слабой топологией* $\sigma(E', E)$ в сопряженном пространстве E' называется топология, для которой множества $W(x_1, \ldots, x_n, \alpha)$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля, когда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ пробегают всевозможные конечные наборы элементов E, а α — множество всех положительных чисел.

Аналогичным образом в пространстве E определяется ослабленная топология. Обозначают через $W(f_1, \ldots, f_n, \alpha)$ $(f_1, \ldots, f_n \in E', \alpha > 0)$ множество точек x из E таких, что $|f_i(x)| \leqslant \alpha$. *Ослабленной топологией* $\sigma(E, E')$ в пространстве E называется топология, для которой множества $W(f_1, \ldots, f_n, \alpha)$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля, когда $f_1, \ldots, f_n$ пробегают всевозможные конечные наборы элементов из E', а α — множество всех положительных чисел.

Таким образом, за окрестность нуля $V_\theta^{(\alpha)}$ в слабой (ослабленной) топологии принимается всякое множество, содержащее множество $W(x_1, \ldots, x_n, \alpha)$ $(W(f_1, \ldots, f_n, \alpha))$; всякая окрестность $V_x^{(\alpha)}$ элемента x получается из некоторой окрестности нуля $V_\theta^{(\alpha)}$ путем ее «сдвига» на элемент x:

$$V_x^{(\alpha)} = x \dotplus V_\theta^{(\alpha)}.$$

Слабая и ослабленная топологии — это локально выпуклые топологии, так как множества $W(x_1, \ldots, x_n, \alpha)$ и $W(f_1, \ldots, f_n, \alpha)$ выпуклы.

В случае бесконечномерного пространства E ослабленная топология $\sigma(E, E')$ представляет собой пример неметризуемой локально выпуклой топологии; слабая топология $\sigma(E', E)$ будет также неметризуемой, если пространство E бесконечномерно и банахово.

Последовательность непрерывных линейных функционалов $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ называется *слабо сходящейся* к функционалу f_0, если она сходится к f_0 в слабой топологии $\sigma(E', E)$ пространства E'. Для того чтобы последовательность $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ слабо сходилась к функционалу f_0, необходимо и достаточно, чтобы $f_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f_0(x)$ для любого элемента $x \in E$.

Говорят, что последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ элементов из E *слабо сходится к элементу* x_0, если она сходится к x_0 в ослабленной топологии $\sigma(E, E')$ пространства E. Критерий слабой сходимости последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ к элементу x_0 заключается в том, чтобы равенство $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$ выполнялось для всякого функционала $f \in E'$. В отличие от слабой сходимости элементов (функционалов), сходимость последовательности элементов (функционалов) по норме пространства E (E') называют *сильной сходимостью*. Сильная сходимость элементов (функционалов) всегда влечет слабую сходимость, однако обратное утверждение для случая бесконечномерного пространства, вообще говоря, неверно. В конечномерном банаховом пространстве сильная и слабая сходимости элементов и функционалов эквивалентны. В пространстве l_1, которое является бесконечномерным банаховым пространством, сильная и слабая сходимости элементов также оказываются эквивалентными, однако ослабленная топология в бесконечномерном линейном нормированном пространстве всегда слабее (см. [5]) исходной топологии. Тем не менее справедливо утверждение: *выпуклое множество T в линейном нормированном пространстве E имеет одно и то же замыкание как в исходной топологии пространства E, так и в ослабленной топологии $\sigma(E, E')$.*

В частности, если последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к x_0, то существует последовательность линейных комбинаций $\left\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{(m)} x_i\right\}$, сходящаяся по норме к x_0.

4. Свойства сферы в сопряженном банаховом пространстве. Множество S топологического пространства E называется *компактным*, если из всякого покрытия S открытыми множествами пространства E можно выделить конечное подпокрытие *).

Это определение компактного множества для метрического пространства эквивалентно определению замкнутого компактного множества, данному в п. 7 § 2.

В пространстве E', сопряженном к линейному нормированному пространству E, каждая замкнутая сфера компактна в слабой топологии $\sigma(E', E)$.

В пространстве E', сопряженном к сепарабельному нормированному пространству и наделенном слабой топологией $\sigma(E', E)$, каждая замкнутая сфера есть метризуемое компактное пространство.

Пусть T — выпуклое множество в линейной системе E. Говорят, что точка $x \in T$ есть *экстремальная точка* множества T, если в T нет никакого открытого отрезка, содержащего x.

В евклидовом пространстве R_n каждая граничная точка единичной сферы экстремальная, в пространстве $C(0, 1)$ единичная сфера содержит только две экстремальные точки $x(t) \equiv 1$ и $x(t) \equiv -1$, а единичные сферы в пространствах c_0, $L_1(0, 1)$ вообще не содержат экстремальных точек.

Каждое компактное выпуклое множество в линейном топологическом локально выпуклом пространстве E есть замкнутая выпуклая оболочка множества своих экстремальных точек (М. Г. Крейн — Д. П. Мильман).

---

*) Множество, компактное в отделимой топологии, в русской литературе часто называют *бикомпактом*.

Из этого следует, что единичная сфера S бесконечномерного сопряженного банахова пространства E' содержит бесконечное множество экстремальных точек; поэтому пространства $C(0, 1)$, c_0, $L_1(0, 1)$ являются банаховыми пространствами, неизометричными никаким сопряженным банаховым пространствам.

5. Фактор-пространство и ортогональные дополнения. Пусть M — подпространство (замкнутое!) банахова пространства E. *Классом смежности* по подпространству M называется совокупность элементов $X = x \dot{+} M$, где x — фиксированный элемент из E. Совокупность классов смежности будет линейной системой, если под суммой классов X и Y понимать класс $X + Y$, построенный по элементу $x + y$, где x и y — какие-либо элементы классов X и Y. Аналогично класс λX строится по элементу λx, где $x \in X$. При так введенных операциях сложения и умножения на числа совокупность всех классов смежности называется *фактор-пространством E/M пространства E по подпространству M.*

В фактор-пространстве E/M вводится норма

$$\|X\| = \inf_{x \in X} \|x\|.$$

Относительно этой нормы фактор-пространство E/M является банаховым пространством.

Через $M^\perp$ обозначается совокупность всех непрерывных линейных функционалов на E, обращающихся тождественно в нуль на M. Совокупность $M^\perp$ является слабо замкнутым (т. е. замкнутым в топологии $\sigma(E', E)$) подпространством сопряженного пространства E' и называется *ортогональным дополнением к подпространству M.* Обратно, каждое слабо замкнутое подпространство $M' \subset E'$ является ортогональным дополнением к подпространству $M \subset E$, состоящему из всех элементов, на которых обращается в нуль любой функционал из M'.

Соотношение

$$f(x) = F(X) \qquad (x \in X)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между функционалами $f \in M^\perp$ и непрерывными линейными функционалами F на E/M ($F \in (E/M)'$). При этом соответствии пространство, сопряженное к фактор-пространству E/M, изометрично пространству $M^{\perp}$.

Каждый функционал из E', естественно, порождает непрерывный функционал на M; функционалы из $M^{\perp}$ порождают на M нулевые функционалы. Обратно, всякий непрерывный функционал на M может быть расширен без увеличения нормы на все E. Пространство M', сопряженное к пространству M, изометрично пространству $E'/M^{\perp}$.

6. Рефлексивные банаховы пространства. Пусть E — линейное нормированное пространство и E' — пространство, сопряженное к E. Поскольку E' является банаховым пространством, то имеет смысл говорить о пространстве $E'' = (E')'$, сопряженном к E'.

Каждый элемент $x_0 \in E$ порождает на E' непрерывный линейный функционал $F_{x_0}(f)$, определяемый равенством $F_{x_0}(f) = f(x_0)$. Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между элементами пространства E и некоторым подмножеством $\pi(E)$ пространства E''. Это соответствие является изометрией между пространствами E и $\pi(E)$ и называется *естественным отображением* пространства E в пространство E''.

Банахово пространство E называется *рефлексивным*, если оно оказывается изометричным при естественном отображении своему второму сопряженному пространству E''.

Так как соответствие, осуществляющее изометрию, имеет в данном случае специальный вид (элементу $x \in E$ сопоставляется элемент $F_x(f) \in E''$), то наличие изометрии между пространствами E и E'' еще не позволяет сделать вывод о том, что пространство E рефлексивно. Существуют так называемые *квазирефлексивные* банаховы пространства E, для которых $E'' = \pi(E) \oplus E_n$, где E_n n-мерно. Эти пространства E изоморфны пространствам E'', но не являются рефлексивными. Существуют примеры нерефлексивных квазирефлексивных пространств E, изометричных пространствам E''.

Всякое подпространство M рефлексивного (квазирефлексивного) пространства E рефлексивно (квазирефлексивно); фактор-пространство E/M рефлексивно (квазирефлексивно), Критерии рефлексивности банахова пространства.

1) *Для того чтобы пространство E было рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы всякий непрерывный линейный функционал $f(x)$, определенный в E, достигал* suprеmum'а *на единичной сфере пространства E, т. е. чтобы существовал элемент x_f такой, что $\|x_f\|=1$ и $f(x_f)=\|f\|$.*

2) *Для того чтобы банахово пространство E было рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы его единичный шар $S(\theta, 1)$ был компактен в ослабленной топологии $\sigma(E, E')$.*

3) *Для того чтобы банахово пространство E было рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы его единичный шар был замкнутым множеством в любой нормируемой топологии, сравнимой* (*см.* [5]) *с топологией исходного пространства.*

Банахово пространство E называется *равномерно выпуклым*, если для каждого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что из $\|x\|=1$, $\|y\|=1$ и $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|>1-\delta$ следует $\|x-y\|<\varepsilon$.

4) *Всякое равномерно выпуклое банахово пространство рефлексивно.*

Класс равномерно выпуклых банаховых пространств не совпадает с множеством всех рефлексивных банаховых пространств: можно привести пример рефлексивного банахова пространства, не являющегося равномерно выпуклым.

Пространства l_p, $L_p(0, 1)$ при $p>1$ равномерно выпуклы, а потому рефлексивны. Всякое конечномерное банахово пространство рефлексивно. Все остальные пространства, рассмотренные в п. 5 § 2, являются нерефлексивными банаховыми пространствами.

§ 5. Линейные операторы

1. Линейные ограниченные операторы. Пусть E и F — две линейные системы. Говорят, что на множестве $D\subset E$ задан *оператор A со значениями в F* (оператор, *действующий из D в F*), если каждому элементу $x\in D$ поставлен в соответствие элемент $y=Ax\in F$. Множество D называется *областью определения* оператора и обозначается через $D(A)$. Совокупность всех элементов y из F, представимых в виде

$y=Ax$ $(x\in D(A))$, называется *областью значений* оператора A и обозначается через $R(A)$.

Примером оператора в пространстве $C(0, 1)$ может служить оператор возведения в квадрат: $Ax(t)=x^2(t)$. Областью определения оператора служит все пространство $C(0, 1)$, областью значений — совокупность всех неотрицательных функций из $C(0, 1)$. Этот же оператор, рассматриваемый на пространстве $L_2(0, 1)$, будет отображать его в совокупность неотрицательных функций из $L_1(0, 1)$.

Оператор A называется *линейным*, если $D(A)$ — линейное многообразие в E и для любых x_1, $x_2\in D(A)$

$$A(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)=\alpha_1 Ax_1+\alpha_2 Ax_2.$$

Примерами линейных операторов в любой линейной системе E служат: единичный или тождественный оператор I, ставящий в соответствие каждому элементу из E сам этот элемент: $Ix=x$; оператор подобного преобразования: $\Lambda x=\lambda x$ $(x\in E$, λ — фиксированное число).

В конечномерном пространстве E_n примерами линейных операторов служат линейные преобразования пространства. Такие операторы могут быть заданы с помощью квадратной матрицы (a_{ik}): если $x=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ и $y=\{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$, то

$$\eta_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k.$$

Аналогами таких операторов в функциональных пространствах являются интегральные операторы

$$y(t)=Ax(t)=\int_0^1 K(t, s)\,x(s)\,ds.$$

Если, например, ядро $K(t, s)$ непрерывно, то этот линейный оператор определен на всем пространстве $C(0, 1)$ и отображает его в некоторую часть пространства $C(0, 1)$.

В пространстве $C(0, 1)$ можно рассматривать линейный оператор дифференцирования: $Ax(t)=x'(t)$, определенный на непрерывно дифференцируемых функциях: $D(A)=C^{(1)}(0, 1)$. Областью значений этого оператора будет все пространство $C(0, 1)$. Если этот оператор расширить на совокупность абсолютно непрерывных функций, то его областью значений будет пространство $L_1(0, 1)$. В теории обобщенных функций (см. гл. VIII) оператор дифференцирования расширяется на все пространство $C(0, 1)$, при этом он отображает пространство $C(0,1)$ в некоторое пространство обобщенных функций.

Пусть теперь E и F — два линейных нормированных пространства. Оператор A называется *непрерывным в точке* $x_0 \in D(A)$, если из $x_n \longrightarrow x_0$ $(x_n \in D(A))$ следует $Ax_n \longrightarrow Ax_0$. Если оператор A определен и непрерывен в каждой точке пространства E, то его называют просто *непрерывным оператором из E в F*.

Линейный оператор, определенный в E, называется *ограниченным*, если

$$\| Ax \|_F \leqslant C \| x \|_E,$$

где C не зависит от выбора $x \in E$.

Для того чтобы линейный оператор, действующий из E в F, был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограниченным.

Наименьшее из чисел C в предыдущем неравенстве называется *нормой оператора* A и обозначается так: $\| A \|_{E \to F}$. Если F совпадает с E, то пишут просто $\| A \|$. Из определения следует

$$\| A \|_{E \to F} = \sup_{x \in E} \frac{\| Ax \|_F}{\| x \|_E} = \sup_{\| x \|_E = 1} \| Ax \|_F.$$

2. Примеры линейных ограниченных операторов. Интегральные операторы. Интерполяционные теоремы.

1) Операторы в конечномерных пространствах. Всякий линейный оператор A, заданный матрицей (a_{ik}) в банаховом пространстве E_n, является ограниченным. Норма его зависит от той нормы, которая введена в пространстве.

Если ввести норму

$$\| x \| = \max_i | \xi_i |, \text{ то } \| A \| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{k=1}^{n} | a_{ik} |.$$

Если

$$\| x \| = \sum_{i=1}^{n} | \xi_i |, \text{ то } \| A \| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} | a_{ik} |.$$

Если ввести евклидову норму

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2}, \quad \text{то} \quad \|A\| = \sqrt{\mu_1},$$

где μ_1 — наибольшее собственное число матрицы AA^* (здесь $A^* = (a_{ki})$). Если матрица (a_{ik}) симметрична, то $\sqrt{\mu_1} = \lambda_1$, где λ_1 — наибольшее собственное число матрицы A.

2) Интегральные операторы. Если линейный интегральный оператор с непрерывным ядром $K(t, s)$ рассматривать как оператор из $C(0, 1)$ в $C(0, 1)$, то он ограничен и

$$\|A\|_{C \to C} = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int_0^1 |K(t, s)|\, ds.$$

Этот же оператор, как ограниченный оператор из $L_1(0, 1)$ в $L_1(0, 1)$, имеет норму

$$\|A\|_{L_1 \to L_1} = \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} \int_0^1 |K(t, s)|\, dt.$$

Если оператор A рассматривать как оператор из $L_p(0, 1)$ в $L_p(0, 1)$, то для его нормы справедливо неравенство

$$\|A\|_{L_p \to L_p} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int_0^1 |K(t, s)|\, ds \right\}^{1-\frac{1}{p}} \left\{ \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} \int_0^1 |K(t, s)|\, dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Последнее вытекает из общего факта: *если линейный оператор A является одновременно ограниченным оператором из $C(0, 1)$ в $C(0, 1)$ (или из $M(0, 1)$ в $M(0, 1)$) и из $L_1(0, 1)$ в $L_1(0, 1)$, то он является ограниченным, как оператор из $L_p(0, 1)$ в $L_p(0, 1)$, и*

$$\|A\|_{L_p \to L_p} \leqslant \|A\|_{M \to M}^{1-\frac{1}{p}} \, \|A\|_{L_1 \to L_1}^{\frac{1}{p}}.$$

Аналогично, *если линейный оператор ограничен, как оператор из $L_{p_1}(0, 1)$ в $L_{p_1'}(0, 1)$ и как оператор из*

$L_{p_2}(0, 1)$ *в* $L_{p'_2}(0, 1)$, *то он ограничен, как оператор из* $L_p(0, 1)$ *в* $L_{p'}(0, 1)$, *где* $\frac{1}{p}=\frac{1-\mu}{p_1}+\frac{\mu}{p_2}$ *и* $\frac{1}{p'}=\frac{1-\mu}{p'_1}+\frac{\mu}{p'_2}$, *а* μ — *любое число из* $[0, 1]$. *При этом*

$$\|A\|_{L_p\to L_{p'}}\leqslant\|A\|^{1-\mu}_{L_{p_1}\to L_{p'_1}}\,\|A\|^{\mu}_{L_{p_2}\to L_{p'_2}}$$

(М. Рисс).

Последние утверждения в теории операторов носят название *интерполяционных теорем* и допускают широкие обобщения на другие классы банаховых пространств.

3) Операторы типа потенциала. *Операторами типа потенциала* называется класс интегральных операторов с разрывными ядрами вида

$$K(t, s)=\frac{1}{|t-s|^{\lambda}},$$

где $0<\lambda<1$.

Если $1-\lambda>\frac{1}{p}$, то оператор с ядром $K(t, s)$ можно рассматривать как ограниченный оператор из пространства $L_p(0, 1)$ в пространство $C(0, 1)$. Если $1-\lambda<\frac{1}{p}$, то оператор уже не будет действовать из $L_p(0, 1)$ в $C(0, 1)$, его можно рассматривать как ограниченный оператор, действующий из $L_p(0, 1)$ в $L_{p_1}(0, 1)$, где $\frac{1}{p_1}=\frac{1}{p}-(1-\lambda)$.

Аналогичные факты справедливы и для операторов типа потенциала, заданных на функциях в ограниченной n-мерной области G. При этом под величиной $|t-s|$ следует понимать расстояние между точками t и s, число λ должно быть заключено в интервале $(0, n)$. Оператор действует из $L_p(G)$ в $C(G)$, если $1-\frac{\lambda}{n}>\frac{1}{p}$, и в $L_{p_1}(G)$, если $1-\frac{\lambda}{n}<\frac{1}{p}$, где $\frac{1}{p_1}=\frac{1}{p}-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)$. В обоих случаях он является ограниченным.

Все приведенные утверждения справедливы и для операторов с ядрами вида $K(t, s)=\frac{A(t, s)}{|t-s|^{\lambda}}$, где $A(t, s)$ — непрерывное ядро.

4) Сингулярный интегральный оператор. В предыдущем примере ядро интегрального оператора имело суммируемую особенность. Ядра сингулярных интегральных операторов имеют несуммируемые особенности вида $\frac{1}{|t-s|}$. Простейший пример такого оператора дает преобразование Гильберта

$$Ax = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(s)}{t-s}\,ds,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Оказывается, что этот оператор является ограниченным оператором, действующим из $L_p(-\infty, \infty)$ в $L_p(-\infty, \infty)$ при $1 < p < \infty$.

Многомерным (*n-мерным*) *сингулярным оператором* называется интегральный оператор с ядром вида

$$K(t, s) = \frac{Q(t, t-s)}{|t-s|^n},$$

где $Q(t, \tau)$, как функция второго аргумента τ, является однородной функцией нулевой степени, интеграл от которой по единичной сфере S равен нулю. *Если интеграл от* $|Q(t, \tau)|^{p'}$ *по сфере* S *равномерно по* t *ограничен, то сингулярный оператор является ограниченным оператором из* $L_p(R_n)$ *в* $L_p(R_n)$ *при* $1 < p < \infty$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$ (Кальдерон—Зигмунд).

5) Интегральные операторы Гильберта и Харди. Оператор

$$Ax = \int_{0}^{\infty} \frac{x(s)}{t+s}\,ds$$

является ограниченным из $L_p(0, \infty)$ в $L_p(0, \infty)$ при $1 < p < \infty$, и норма его равна $\dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}$ (неравенство Гильберта).

Оператор

$$Ax = \frac{1}{t}\int_{0}^{t} x(s)\,ds$$

является ограниченным из $L_p(0, \infty)$ в $L_p(0, \infty)$ при $p > 1$, и норма его равна $\frac{p}{p-1}$ (неравенство Харди).

6) Дифференциальные операторы. Линейные дифференциальные операторы, рассматриваемые как операторы в одном и том же пространстве, как правило, являются неограниченными. Так, оператор производной не является ограниченным в пространстве $C(0, 1)$; если же его рассматривать как оператор из $C^{(1)}(0, 1)$ в $C(0, 1)$, то он ограничен и его норма равна 1.

Аналогично линейный дифференциальный оператор l-го порядка с непрерывными коэффициентами можно рассматривать как ограниченный оператор из $C^{(l)}(0, 1)$ в $C(0, 1)$.

Для изучения линейных дифференциальных операторов в частных производных обычно привлекаются либо пространства Гёльдера (классический подход), либо пространства W_p^l. Так, эллиптический оператор второго порядка

$$Ax = -\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(t) \frac{\partial^2 x}{\partial t_i \partial t_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t) \frac{\partial x}{\partial t_i} + c(t) x,$$

определенный в n-мерной области G, рассматривается как ограниченный оператор из пространства $W_2^2(G)$ в пространство $L_2(G)$.

3. Сходимость последовательностей операторов. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность ограниченных линейных операторов, действующих из линейного нормированного пространства E в линейное нормированное пространство F.

Последовательность $\{A_n\}$ называется *сходящейся по норме* к линейному ограниченному оператору A_0 из E в F, если $\lim\limits_{n \to \infty} \| A_0 - A_n \|_{E \to F} = 0$.

Последовательность $\{A_n\}$ называется *сильно сходящейся* к оператору A_0, если $\lim\limits_{n \to \infty} \| A_0 x - A_n x \|_F = 0$ при любом $x \in E$.

Последовательность $\{A_n\}$ называется *слабо сходящейся* к оператору A_0, если при любом $x \in E$ последовательность $\{A_n x\}$ слабо сходится к $A_0 x$.

Из сходимости по норме следует сильная сходимость, из сильной — слабая. Обратные утверждения, вообще говоря, неправильны.

Если последовательность $\{A_n\}$ сильно сходится к A_0 и нормы операторов A_n ограничены в совокупности: $\|A_n\|_{E\to F} \leqslant M$ $(n=1, 2, \ldots)$, то оператор A_0 также является линейным ограниченным оператором и

$$\|A_0\|_{E\to F} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|A_n\|_{E\to F}.$$

В случае, когда E является банаховым пространством, последнее утверждение значительно усиливается: *если последовательность ограниченных линейных операторов A_n, действующих из банахова пространства E в линейное нормированное пространство F, сильно сходится к оператору A_0, то нормы операторов ограничены в совокупности, и следовательно, оператор A_0 также ограничен.*

Для того чтобы последовательность ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства E в банахово пространство F, сильно сходилась к некоторому линейному ограниченному оператору, необходимо и достаточно, чтобы: 1) нормы операторов A_n были ограничены в совокупности; 2) последовательность $\{A_n x'\}$ была сходящейся при любом x' из некоторого всюду плотного множества $D\subset E$.

Последняя теорема имеет многочисленные применения в вопросах, связанных со сходимостью и суммируемостью рядов и интегралов, сходимостью интерполяционных процессов, процессов механических квадратур и т. п. (см. [19]).

Приведенные факты, конечно, справедливы и в том случае, когда пространство F совпадает с совокупностью всех действительных или комплексных чисел. В этом случае во всех формулировках слово «оператор» следует заменить на «функционал», а «сильную сходимость операторов» — на «слабую сходимость функционалов».

4. Обратный оператор. Пусть линейный оператор A отображает линейную систему E в линейную систему F. Если оператор A обладает тем свойством, что $Ax=\theta$ только при $x=\theta$, то каждому y из области значений $R(A)$ оператора A соответствует только один элемент x, для которого $y=Ax$

(решение уравнения $y=Ax$ единственно). Это соответствие можно рассматривать как оператор B, определенный на $R(A)$ со значениями, заполняющими E. Оператор B линейный. По определению $BAx=x$, поэтому оператор B называется *левым обратным к* A.

Если $R(A)=F$, т. е. оператор A устанавливает взаимно однозначное соответствие между E и F, то оператор B определен на всем F, называется просто *обратным оператором к* A и обозначается через A^{-1}. По определению

$$A^{-1}Ax=x \quad (x\in E) \text{ и } AA^{-1}y=y \quad (y\in F).$$

Одним из глубоких фактов теории банаховых пространств является следующее утверждение.

Если линейный ограниченный оператор A, отображающий банахово пространство E на банахово пространство F, имеет обратный A^{-1}, то оператор A^{-1} ограничен. (С. Банах.)

Эта теорема перестает быть справедливой, если отказаться от полноты одного из пространств E или F. Она обобщается на некоторые классы линейных топологических пространств и, в частности, на полные метрические пространства.

Теорема об обратном операторе, другими словами, означает, что из существования и единственности решения уравнения

$$Ax=y$$

при всякой правой части из F следует непрерывная зависимость решения $x=A^{-1}y$ от правой части y.

Если ограниченный линейный оператор A из банахова пространства E в банахово пространство F имеет обратный, то и близкие к нему линейные ограниченные операторы имеют обратные: если

$$\|B-A\|_{E\to F}<\frac{1}{\|A^{-1}\|_{F\to E}},$$

то оператор B имеет обратный B^{-1}.

5. Пространство операторов. Кольцо операторов. Для линейных операторов, отображающих линейную систему E в линейную систему F, естественным образом вводятся операции сложения и умножения на число. По определению $A=\alpha_1A_1+\alpha_2A_2$ есть оператор, для которого

$$Ax=\alpha_1A_1x+\alpha_2A_2x \quad (x\in E).$$

Таким образом, все линейные операторы из E в F образуют линейную систему $L(E, F)$.

Если E и F нормированы, то и $L(E, F)$ может быть нормировано с помощью нормы $\|A\|_{E\to F}$. Если F полно, то $L(E, F)$ банахово.

Если рассматривать операторы, определенные и действующие в одном и том же пространстве E, то для них можно также ввести операцию умножения: по определению $A=A_1A_2$, если

$$Ax = A_1(A_2x).$$

Умножение, вообще говоря, некоммутативно: возможно, что $A_1A_2 \neq A_2A_1$. Если $A_1A_2 = A_2A_1$, то говорят, что операторы A_1 и A_2 *перестановочны*.

Если A_1, $A_2 \in L(E, E)$, то и $A \in L(E, E)$, причем

$$\|A\| \leqslant \|A_1\| \|A_2\|.$$

Если в линейном нормированном пространстве введена операция умножения $x \cdot y$ так, что оно становится кольцом (точнее, алгеброй) и

$$\|x \cdot y\| \leqslant \|x\| \|y\|,$$

то оно называется *нормированным кольцом* (*алгеброй*) (см. гл. VI).

Пространство $L(E, E)$ является нормированным кольцом. Кольцо обладает единицей, роль которой играет тождественный оператор I.

Если E банахово, то совокупность операторов, имеющих обратные, образует открытое множество в этом кольце.

6. Резольвента линейного ограниченного оператора. Спектр. Пусть E — комплексное банахово пространство и A — линейный ограниченный оператор, действующий в нем. Комплексное число λ называется *регулярной точкой* оператора A, если оператор $A-\lambda I$ имеет обратный $(A-\lambda I)^{-1}$. В противном случае λ называется *точкой спектра* оператора A.

Если λ — регулярная точка A, то ограниченный линейный оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ называется *резольвентой* и обозначается R_λ.

Регулярные точки образуют открытое множество на комплексной плоскости, спектр — замкнутое.

Все точки, лежащие вне круга радиуса $\|A\|$ с центром в начале координат, являются регулярными. Все точки спектра лежат в круге $|\lambda| \leqslant \|A\|$. При $|\lambda| > \|A\|$ для резольвенты справедливо разложение в ряд

$$R_\lambda = -\frac{1}{\lambda}\left(I + \frac{A}{\lambda} + \frac{A^2}{\lambda^2} + \ldots + \frac{A^n}{\lambda^n} + \ldots\right),$$

причем ряд сходится по норме операторов.

Радиус наименьшего круга с центром в начале координат, содержащего спектр оператора A, называется *спектральным радиусом* r_A оператора A. Справедлива формула (И. М. Гельфанд)

$$r_A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|};$$

при этом предел всегда существует. Из предыдущего следует, что $r_A \leqslant \|A\|$. Более того, $r_A \leqslant \sqrt[n]{\|A^n\|}$. На основании признака Коши ряд для резольвенты будет сходиться, если $r_A < |\lambda|$, и расходиться, если $r_A > |\lambda|$. В частности, ряд

$$(I - A)^{-1} = -R_1 = I + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots$$

сходится при $r_A < 1$ и расходится при $r_A > 1$.

Спектр любого ограниченного оператора является непустым множеством. Если

$$r_A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = 0,$$

то спектр состоит из одной точки $\lambda = 0$. Примером такого оператора является интегральный оператор Вольтерра

$$Ax = \int_0^t K(t, s)\, x(s)\, ds,$$

где $K(t, s)$ — непрерывная в треугольнике $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$ функция. Если этот оператор рассматривать как ограниченный оператор в пространстве $C(0, 1)$ или $L_2(0, 1)$, то его спектр состоит из точки $\lambda = 0$. Это соответствует тому, что уравнение

$$x(t) - \mu \int_0^t K(t, s)\, x(s)\, ds = y(t)$$

имеет единственное решение при любой правой части и любом μ.

Для любых двух регулярных точек λ и μ справедливо тождество Гильберта

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu.$$

Предел по норме операторов

$$\lim_{\mu \to \lambda} \frac{R_\lambda - R_\mu}{\lambda - \mu} = R_\lambda^2$$

естественно называть *производной* по λ:

$$\frac{dR_\lambda}{d\lambda} = R_\lambda^2.$$

Операторная функция от λ называется *аналитической* в λ_0, если она разлагается в окрестности λ_0 в ряд по целым положительным степеням $(\lambda - \lambda_0)$, сходящийся по норме операторов.

Резольвента является операторной функцией от λ, аналитической в области, состоящей из регулярных точек оператора A. Функция $R_\lambda x$ при $x \in E$ в области, состоящей из регулярных точек A, будет аналитической функцией со значениями в E.

Пусть λ_0 — полюс аналитической функции R_λ. Тогда для любого элемента $R_\lambda x$ справедливо разложение в ряд Лорана

$$R_\lambda x = \frac{e_0}{(\lambda-\lambda_0)^m} + \frac{e_1}{(\lambda-\lambda_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{e_{m-1}}{\lambda-\lambda_0} + \\ + f_0 + f_1(\lambda-\lambda_0) + \ldots + f_n(\lambda-\lambda_0)^n + \ldots$$

Элемент $e_0 = e_0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$Ae_0 = \lambda_0 e_0$$

и называется *собственным элементом* оператора A, отвечающим *собственному числу* λ_0. Элементы $e_1, \ldots, e_{m-1}$ удовлетворяют соотношениям

$$Ae_1 = \lambda_0 e_1 + e_0,$$
$$Ae_2 = \lambda_0 e_2 + e_1, \ \ldots, \ Ae_{m-1} = \lambda_0 e_{m-1} + e_{m-2}$$

и называются *присоединенными элементами* к собственному элементу e_0.

Подпространство L пространства E называется *инвариантным* относительно оператора A, если из $x \in L$ следует, что $Ax \in L$.

Конечномерное подпространство, состоящее из всевозможных линейных комбинаций элементов $e_0, e_1, \ldots, e_{m-1}$, является инвариантным относительно оператора A и называется *корневым подпространством*. Элементы e_k образуют в нем базис, в котором матрица оператора A имеет форму жордановой клетки (см. *СМБ*, «Высшая алгебра», гл. II, § 1, п. 11).

Если λ_0 — простой полюс резольвенты R_λ $(m=1)$, то собственному числу λ_0 соответствуют лишь собственные векторы оператора A. Присоединенные векторы отсутствуют.

С помощью резольвенты вводится понятие функции от ограниченного оператора. Если $f(\lambda)$ — функция, аналитическая в области, содержащей спектр оператора A, то под функцией $f(A)$ понимают оператор

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(\lambda)\, R_\lambda\, d\lambda,$$

где контур Γ содержит внутри себя спектр оператора A. Этот интеграл является обобщением интеграла Коши. Он не зависит от выбора контура Γ.

7. Сопряженный оператор. Пусть E и F — линейные нормированные пространства и A — ограниченный линейный оператор, действующий из E в F.

Если $g(y)$ — линейный непрерывный функционал на F $(g \in F')$, то функционал

$$f(x) = g(Ax)$$

будет линейным непрерывным функционалом на E $(f \in E')$, причем

$$\|f\|_{E'} \leqslant \|g\|_{F'}\, \|A\|_{E \to F}.$$

Таким образом, каждому функционалу $g \in F'$ ставится в соответствие функционал $f \in E'$, т. е. определяется оператор $A'g = f$. Этот оператор A' называется *сопряженным оператором* к оператору A.

Сопряженный оператор является линейным ограниченным оператором, причем

$$\|A'\|=\|A\|.$$

Если $A, B\in L(E, F)$, то $(\lambda A)'=\lambda A'$ и $(A+B)'=A'+B'$. Если A, $B\in L(E, E)$, то $(AB)'=B'A'$.

Если интегральный оператор с непрерывным ядром $K(t, s)$ рассматривать, например, как ограниченный оператор из $L_p(0, 1)$ в $L_p(0, 1)$, то сопряженным к нему будет интегральный оператор с ядром $K'(t, s)=K(s, t)$, т. е. оператор

$$A'x=\int_0^1 K(s, t)\,x(s)\,ds,$$

рассматриваемый как оператор из $L_q(0, 1)$ в $L_q(0, 1)$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$.

Если E и F банаховы, то для существования обратного оператора A^{-1} необходимо и достаточно существование оператора $(A')^{-1}$, причем $(A')^{-1}=(A^{-1})'$.

Из последнего утверждения, примененного к оператору $A-\lambda I$ и ему сопряженному $A'-\lambda I$, следует, что спектры операторов A и A' совпадают.

Более глубокая связь между свойствами оператора и ему сопряженного изложена в п. 9.

8. Вполне непрерывные операторы. Пусть E и F — банаховы пространства. Линейный оператор, действующий из E в F, называется *вполне непрерывным*, если он отображает всякое ограниченное множество пространства E в компактное множество пространства F.

Из полной непрерывности линейного оператора следует его непрерывность. Обратное, вообще говоря, неверно. Например, тождественный оператор I непрерывен, но в случае бесконечномерного пространства E он не является вполне непрерывным.

Для полной непрерывности линейного оператора достаточно, чтобы он единичный шар пространства E переводил в компактное множество пространства F. Область значений вполне непрерывного оператора сепарабельна. Вполне непрерывный оператор переводит всякую слабо сходящуюся последовательность элементов в последовательность, сходящуюся по норме.

Предел по норме последовательности вполне непрерывных операторов есть снова вполне непрерывный оператор. Сильный и тем более слабый предел последовательности вполне непрерывных операторов может быть не вполне непрерывным оператором. Пусть, например, E — банахово пространство l_1. Операторы проектирования P_N, ставящие в соответствие каждому $x=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ элемент $P_N x=\{\xi_1, \ldots, \xi_N, 0, 0, \ldots\}$, будут вполне непрерывными, а их сильный предел равен единичному оператору I, который не вполне непрерывен.

Линейная комбинация вполне непрерывных операторов является вполне непрерывным оператором. Произведение вполне непрерывного оператора на ограниченный есть вполне непрерывный оператор. Если рассмотреть все вполне непрерывные операторы из $L(E, E)$, то они образуют замкнутый идеал в нормированном кольце $L(E, E)$.

Сопряженный оператор к вполне непрерывному является вполне непрерывным.

Простейшим примером вполне непрерывного оператора является *одномерный* линейный оператор вида

$$Ax=f_1(x)\,y_1,$$

где y_1 — фиксированный элемент из F, а $f_1(x)$ — фиксированный функционал из E'. Сокращенно одномерный оператор обозначают так: $A=f_1 \otimes y_1$.

Более общий вид имеет произвольный *конечномерный* линейный оператор

$$A=\sum_{i=1}^{m} f_i \otimes y_i,$$

где $y_i \in F$, а $f_i \in E'$. По определению

$$Ax=\sum_{i=1}^{m} f_i(x)\,y_i.$$

Конечномерный оператор вполне непрерывен.

Неизвестно, можно ли всякий вполне непрерывный оператор представить как предел по норме конечномерных линейных операторов.

Линейный оператор называется *ядерным*, если он представлен в виде

$$Ax=\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\,y_i,$$

где $y_i \in F$, $f_i \in E'$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{E'} \|y_i\|_F < \infty$.

Ядерные операторы представляют собой важный подкласс класса вполне непрерывных операторов.

Пусть A — вполне непрерывный оператор, определенный и действующий в банаховом пространстве E. Если он конечномерен, то его спектр совпадает с конечным множеством его собственных чисел. В общем случае его спектр состоит из не более чем счетного числа точек. В бесконечномерном пространстве точка $\lambda_0=0$ всегда является точкой спектра вполне непрерывного оператора, причем лишь она может быть точкой сгущения для множества других точек спектра. Итак, спектр вполне непрерывного оператора состоит из конечного числа точек либо из точки $\lambda_0=0$ и последовательности $\lambda_n \to 0$.

Все точки λ_n ($n=1, 2, \ldots$) являются полюсами резольвенты R_λ и, следовательно, собственными числами оператора A. Каждому собственному числу $\lambda_n \neq 0$ соответствует только конечное число линейно независимых собственных элементов и присоединенных к ним элементов.

В конечномерном пространстве собственные и присоединенные элементы образуют базис. В бесконечномерном пространстве для произвольного вполне непрерывного оператора картина может быть значительно сложнее. Бывают вполне непрерывные операторы, которые вообще не имеют собственных чисел, спектр их состоит из одной точки $\lambda_0=0$. Примером такого оператора может служить интегральный оператор Вольтерра (см. § 4, п. 6). В связи с этим вполне непрерывные операторы, не имеющие собственных чисел, называют *вольтерровыми*. В последние годы много усилий было приложено для отыскания условий, при которых собственные и присоединенные векторы вполне непрерывного оператора образуют полную систему в пространстве E, т. е. систему, линейная замкнутая оболочка которой совпадает с E. Существенные результаты получены для случая гильбертова пространства (см. гл. II, § 2, п. 5). В произвольном банаховом пространстве справедлив такой факт: хотя вполне непрерывный оператор может и не иметь собственных векторов, но он обязательно имеет собственные инвариантные подпространства, т. е. инвариантные подпространства, не совпадающие ни с E, ни с $\{\theta\}$.

Многочисленные примеры вполне непрерывных операторов дают интегральные операторы. Если ядро интегрального оператора

$$Ax = \int_0^1 K(t, s)\, x(s)\, ds$$

непрерывно, то он будет порождать вполне непрерывный оператор из $C(0, 1)$ в $C(0, 1)$. Если ядро удовлетворяет более слабому условию

$$\int_0^1\int_0^1 |K(t, s)|^q\, dt\, ds < \infty \qquad (q > 1),$$

то оператор будет вполне непрерывным, как оператор из $L_p(0, 1)$ в $L_p(0, 1)$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$. Приведенное условие не является необходимым. Существуют примеры вполне непрерывных интегральных операторов, действующих из $L_p(0, 1)$ в $L_p(0, 1)$ $(1<p<\infty)$, ядра которых как функции двух переменных не суммируемы ни с какой степенью >1.

Аналогом интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода в теории операторов является уравнение

$$x - Ax = y.$$

Основные факты теории Фредгольма справедливы для этого уравнения в случае, когда оператор A вполне непрерывен.

Рассматривается сопряженное уравнение

$$g - A'g = f.$$

Если исходное уравнение имеет решение при любой правой части из F, то и сопряженное уравнение имеет решение при любой правой части из E', причем решения эти единственны, т. е. однородные уравнения

$$x - Ax = \theta, \qquad g - A'g = \theta$$

имеют лишь тривиальные решения $x = \theta$, $g = \theta$.

Однородные уравнения имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений, и размерности соответствующих корневых подпространств совпадают.

Если $g_1, \ldots, g_m$ — максимальная система линейно независимых решений однородного уравнения $g - A'g = 0$, то исходное уравнение $x - Ax = y$ имеет решение только для тех правых частей, для которых $g_k(y) = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, m$).

Три теоремы Фредгольма будут справедливы и для уравнений более общего вида:

$$Ux - Ax = y,$$

где A — вполне непрерывный оператор, а U — ограниченный оператор, имеющий обратный U^{-1}. Оказывается, что этим исчерпываются все линейные уравнения с ограниченными операторами, для которых справедливы теоремы Фредгольма.

9. Операторы с всюду плотной областью определения. Линейные уравнения. Основными примерами ограниченных операторов являются интегральные операторы. Дифференциальные операторы в естественных нормах, как правило, являются неограниченными. Поэтому для применения теории ограниченных операторов к дифференциальным уравнениям эти уравнения сводят к интегральным. Обычно это сведение делается с помощью функции Грина или других разрешающих ядер. Построение таких ядер не является тривиальным, поэтому в последнее время развивается теория неограниченных операторов в форме, которая допускает непосредственные применения к теории дифференциальных уравнений.

Пусть E — банахово пространство и A — линейный оператор, определенный на всюду плотном множестве $D(A)$ и действующий из $D(A)$ в банахово пространство F. Для такого оператора можно ввести понятие сопряженного оператора. Если $g(y)$ — ограниченный линейный функционал на F, то функционал $g(Ax)$, определенный на $D(A)$, может быть ограниченным или неограниченным. Если $g(Ax)$ ограничен, то он может быть единственным образом расширен до непрерывного функционала $f(x)$ на всем пространстве E: при $x_n \to x$, $x_n \in D(A)$, полагают $g(Ax) = \lim\limits_{n\to\infty} g(Ax_n)$. При выполнении этих условий говорят, что на g определен сопряженный оператор A':

$$f(x) = A'g(x).$$

Из предыдущего следует, что $g \in D(A')$, если

$$|g(Ax)| \leqslant C\|x\|$$

при $x \in D(A)$, и при этих x

$$A'g(x) = g(Ax).$$

Сопряженный оператор играет существенную роль при исследовании вопроса о разрешимости уравнения

$$Ax = y \qquad (y \in F,\ x \in D(A)). \tag{A}$$

Наряду с этим уравнением рассматривается сопряженное уравнение

$$A'g = f \qquad (f \in E',\ g \in D(A')). \tag{A'}$$

Для уравнений (A) и (A′) справедливы утверждения:

1. *Для того чтобы уравнение* (A) *было разрешимо для всюду плотного множества правых частей y из F* $(\overline{R(A)} = F)$, *необходимо и достаточно, чтобы для уравнения* (A′) *была справедлива теорема единственности, т. е. чтобы из $A'g = \theta$ следовало $g = \theta$.*

2. *Для того чтобы уравнение* (A′) *было разрешимо для всюду плотного множества правых частей f из E', необходимо, а если E рефлексивно, то и достаточно, чтобы для уравнения* (A) *была справедлива теорема единственности.*

3. *Для разрешимости уравнения* (A′) *при всяком $f \in E'$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\|Ax\|_F \geqslant m\|x\|_E \qquad (x \in D(A), \qquad m > 0).$$

4. *Для разрешимости уравнения* (A) *при любой правой части $y \in F$ необходимо, чтобы выполнялось неравенство*

$$\|A'g\|_{E'} \geqslant m\|g\|_{F'} \qquad (g \in D(A'), \qquad m > 0).$$

Свойства 1—3 справедливы, когда E и F — линейные нормированные пространства; свойство 4 справедливо, когда F — банахово.

Последнее неравенство, вообще говоря, не является достаточным для разрешимости уравнения (А), но справедливо следующее утверждение.

5. *Если $D(A')$ всюду плотно в F' и выполнено последнее неравенство, то при любом $y_0 \in F$ уравнение* (А) *имеет «слабое решение» в том смысле, что существует элемент x_0, удовлетворяющий тождеству*

$$g(y_0) = A'g(x_0)$$

при любом $g \in D(A')$.

Если слабое решение x_0 принадлежит области определения оператора A, то оно является истинным.

В частности, если оператор A ограничен и определен во всем пространстве, то из неравенства $\|A'g\|_{E'} \geqslant m\|g\|_{F'}$ следует разрешимость уравнения (А) при любых правых частях.

Если пространство E рефлексивно, то из теоремы единственности для уравнения (А) следует единственность и слабого решения.

10. Замкнутые неограниченные операторы. Пусть E — банахово пространство и A — линейный оператор, определенный на всюду плотном множестве $D(A)$, действующий из $D(A)$ в банахово пространство F. *Расширением* оператора A называется любой оператор A_1 такой, что $D(A_1) \supset D(A)$ и для $x \in D(A)$ $A_1x = Ax$. *Сужением* оператора A на множество $D \subset D(A)$ называется оператор A_2 такой, что $D(A_2) = D$ и $A_2x = Ax$ $(x \in D)$. Если A ограничен, то его можно по непрерывности расширить до линейного ограниченного оператора $\bar{A}$, определенного на всем пространстве E, положив

$$\bar{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n \qquad (x \in E,\ x_n \in D(A),\ x_n \to x).$$

Оператор A (возможно, неограниченный) называется *замкнутым*, если из $x_n \to x_0$ $(x_n \in D(A))$ и $Ax_n \to y_0$ следует, что $x_0 \in D(A)$ и $y_0 = Ax_0$.

Ограниченный оператор, определенный на всем пространстве, всегда замкнут. Весьма важным является тот факт, что и, наоборот, *замкнутый линейный оператор, определенный на всем банаховом пространстве, ограничен.*

Если оператор A не замкнут, то он допускает замкнутое расширение в том и только в том случае, когда из $x_n \to \theta$ $(x_n \in D(A))$ и $Ax_n \to y$ следует, что $y = \theta$.

Если оператор A имеет левый обратный оператор, ограниченный на замкнутом множестве $R(A)$, то он замкнут. В частности, только замкнутые операторы могут иметь ограниченные обратные операторы. Если рассматривать операторы, действующие из $D(A) \subset E$ в E, то только замкнутые операторы могут при каком-либо λ иметь резольвенту $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$. Для замкнутого оператора вводятся понятия регулярных точек и точек спектра так же, как и для ограниченного оператора. Спектр замкнутого оператора может заполнять любое замкнутое множество в комплексной плоскости.

Изучение замкнутых операторов иногда сводится к изучению ограниченных операторов следующим приемом: в области определения $D(A)$ замкнутого оператора A вводится новая норма

$$\|x\|_1 = \|x\|_E + \|Ax\|_F \qquad (x \in D(A)).$$

В этой норме $D(A)$ становится банаховым пространством E_A. Оператор A ограничен, как оператор из E_A в F. Более того, любой оператор B, действующий из $D(A)$ в F и допускающий замыкание, будет ограничен как оператор из E_A в F:

$$\|Bx\|_F \leqslant C\|x\|_1 = C(\|x\|_E + \|Ax\|_F).$$

Сопряженный оператор A' к оператору A с всюду плотной областью определения всегда замкнут. Если область определения $D(A')$ всюду плотна в F', то исходный оператор A допускает замыкание.

Для уравнений (A) и (A′) с замкнутым оператором A эквивалентны следующие утверждения:

1. *Правые части уравнения* (A), *при которых оно разрешимо, образуют замкнутое подпространство пространства F.*

2. *Правые части уравнения* (A′), *при которых оно разрешимо, образуют замкнутое подпространство пространства E'.*

3. *Если через N' обозначить совокупность всех решений уравнения $A'g = 0$, то уравнение* (A) *разрешимо при*

тех и только тех правых частях y, для которых $g(y)=0$ при всех $g \in N'$.

4. *Если через N обозначить совокупность всех решений уравнения $Az=0$, то уравнение* (A′) *разрешимо при тех и только тех f, для которых $f(z)=0$ при всех $z \in N$.*

В частности, если для замкнутого оператора и ему сопряженного удается получить оценки снизу

$$\|Ax\|_F \geqslant m\|x\|_E \quad (x \in D(A)) \text{ и } \|A'g\|_{E'} \geqslant m\|g\|_{F'} \quad (m>0),$$

то из этого следует однозначная разрешимость уравнений (A) и (A′) при любых правых частях из F и E' соответственно.

Как отмечалось, одним из стимулов для изучения неограниченных операторов явились задачи теории дифференциальных уравнений. Пусть Q—линейный дифференциальный оператор порядка l с достаточно гладкими коэффициентами, определенными в области G n-мерного пространства. Этот оператор можно рассматривать как оператор, действующий в $L_p(G)$ с областью определения $D(Q) \subset L_p(G)$, состоящей из всех функций с непрерывными в $\bar{G}$ частными производными порядка l. Пусть $x(t) \in D(Q)$, а $z(t)$—*финитная* в G функция, т. е. бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю в окрестности границы G. Справедливо тождество

$$\int_G Qx(t)\,z(t)\,dt = \int_G x(t)\,Q'z(t)\,dt,$$

где Q'—сопряженный дифференциальный оператор. Тождество получается интегрированием по частям, причем граничные члены пропадают из-за финитности функции $z(t)$.

Финитные функции образуют в $L_q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ всюду плотное множество, на нем определен сопряженный к Q оператор Q', поэтому дифференциальный оператор Q допускает замыкание $\bar{Q}$. Область определения оператора $\bar{Q}$ может уже содержать недифференцируемые в классическом смысле функции (функции с обобщенными производными и т. п.).

Решения уравнения $\bar{Q}x=y$, принадлежащие области определения замыкания $\bar{Q}$ дифференциального оператора Q в различных функциональных пространствах, называются *обобщенными решениями*.

11. Замечание о комплексных пространствах. Пусть E — комплексное линейное нормированное пространство. Иногда удобнее операцию умножения линейного функционала $f(x)$ на число λ вводить не так, как указано в § 4, п. 1, а следующим образом: $f_1 = \lambda f$ означает, что

$$f_1(x) = \bar{\lambda} f(x).$$

Совокупность всех линейных непрерывных функционалов с так введенной операцией умножения на число обозначается через E^* и также называется *сопряженным пространством* к E. Все понятия, введенные для пространства E', аналогично вводятся для пространства E^*. Все факты, справедливые в пространстве E', справедливы и для пространства E^*, лишь в некоторые формулировки следует внести изменения:

1. Сопряженный к оператору A оператор, рассматриваемый как оператор из F^* в E^*, обозначается через A^*. Тогда

$$(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*.$$

2. Для интегрального оператора A с ядром $K(t, s)$ сопряженный оператор A^* имеет ядро $\overline{K(s, t)}$.

3. Если число λ принадлежит спектру оператора A, то число $\bar{\lambda}$ принадлежит спектру A^*, и наоборот.

§ 6. Пространства с базисом

1. Полнота и минимальность системы элементов. Система $\{e_k\}$ элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ называется *полной* в банаховом пространстве E, если линейная оболочка этой системы элементов плотна в E. Очевидно, что полная система элементов может существовать только в сепарабельном пространстве. *Для того чтобы система $\{e_k\}$ была полной в E, необходимо и достаточно, чтобы не существовало линейного функционала $f \in E'$, отличного от нуля и равного нулю на всех элементах e_k $(k = 1, 2, \ldots)$ (ортогонального всем e_k).*

Система элементов $\{e_k\}$ называется *минимальной*, если ни один элемент этой системы не принадлежит замкнутой линейной оболочке остальных элементов.

Для того чтобы система $\{e_k\}$ была минимальной, необходимо и достаточно, чтобы существовала система *линейных функционалов, образующая с данной биортогональную систему, т. е. такая система* $\{f_k\}\subset E'$ $(k=1, 2, \ldots)$, *что* $f_i(e_j)=\delta_{ij}$ *). Если система $\{e_k\}$ является полной и минимальной, то система функционалов $\{f_k\}$ определяется единственным образом.

В каждом сепарабельном банаховом пространстве имеется полная минимальная система. Более того, можно построить такую полную минимальную систему $\{e_k\}$, что соответствующие ей функционалы f_k образуют *тотальное множество*, т. е. из $f_k(x)=0$ $(x\in E,\ k=1, 2, \ldots)$ следует, что $x=0$.

2. Понятие базиса. Система элементов $\{e_k\}$ образует *базис* пространства E, если каждый элемент $x\in E$ представим единственным образом в виде сходящегося ряда

$$x=\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k.$$

Всякий базис представляет собой полную минимальную систему. Однако полная минимальная система может не образовывать базиса в пространстве. Так, например, тригонометрическая система $e_0(t)=\frac{1}{2}$, $e_{2n-1}(t)=\sin nt$, $e_{2n}(t)=\cos nt$ $(n=1, 2, \ldots)$ является полной минимальной системой в пространстве $C[-\pi, \pi]$, но не образует базиса в нем.

П р и м е р ы б а з и с о в.

1) В пространстве $L_2[a, b]$, как и в любом сепарабельном гильбертовом пространстве H (см. гл. II, § 1), всякая полная ортогональная система элементов образует базис. Так, тригонометрическая система функций образует базис в $L_2[-\pi, \pi]$.

Можно строить и неортогональные базисы в гильбертовом пространстве. Напрнмер, если $\{e_i\}$ — полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве H, то система элементов

$$g_k=\sum_{i=1}^{k} p_i e_i \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

образует базис в H, если числа p_i удовлетворяют условиям

$$|p_1|>0, \quad \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^2}{p_{n+1}^2}\leqslant M \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

*) $\delta_{ij}=0$, если $i\neq j$ и $\delta_{ii}=1$.

Система функционалов, образующая с $\{g_k\}$ биортогональную систему, задается системой элементов из H:

$$f_k = \frac{1}{p_k} e_k - \frac{1}{p_{k+1}} e_{k+1}.$$

2) В координатных пространствах c_0 и l_p $(p \geqslant 1)$ система ортов $e_k = \{\overbrace{0, \ldots, 0}^{k-1}, 1, 0, \ldots\}$ образует базис. Эта же система в пространстве c не образует базиса и даже не является полной, так как элемент $e_0 = \{1, 1, \ldots\}$ не принадлежит замыканию линейной оболочки элементов e_k $(k = 1, 2, \ldots)$. Система e_0, e_1, e_2, ... образует уже базис в пространстве c.

3) В пространстве непрерывных функций $C[0, 1]$ можно построить базис следующим образом: пусть $\{r_i\}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ — плотная на $[0, 1]$ последовательность чисел, причем $r_0 = 0$, $r_1 = 1$, $r_i \neq r_j$ при $i \neq j$. Полагают $e_0(t) \equiv 1$ и $e_1(t) = t$. Далее $e_k(t)$ определяются по индукции. Пусть для $i < k$ функции $e_k(t)$ определены и отрезок $[0, 1]$ разбит точками $r_2, \ldots, r_{k-1}$ на $k-1$ интервалов. Пусть r_k принадлежит одному из этих интервалов: $r_{s_1} < r_k < r_{s_2}$, $s_1 < k$, $s_2 < k$. Тогда полагают: $e_k(r_k) = 1$, $e_k(r_{s_1}) = 0$, $e_k(r_{s_2}) = 0$, а на отрезках $[0, r_{s_1}]$ $[r_{s_1}, r_k]$ $[r_k, r_{s_2}]$ и $[r_{s_2}, 1]$ функцию $e_k(t)$ линейно интерполируют. Система $\{e_k(t)\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ образует базис в $C[0, 1]$.

4) В пространствах $L_p[0, 1]$ $(p \geqslant 1)$ базис образует система функций Хаара, определяемых так:

$$\chi_0^{(0)}(t) \equiv 1; \quad \chi_0^{(1)}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} < t \leqslant 1, \\ 0, & t = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\chi_n^{(k)}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leqslant t < \frac{2k-1}{2^{n+1}} \ (k = 1, 2, \ldots, 2^n), \\ -2^{\frac{n}{2}}, & \frac{2k-1}{2^{n+1}} < t \leqslant \frac{2k}{2^{n+1}}, \\ 0 & \text{для остальных значений } t. \end{cases}$$

Функции $\chi_n^{(k)}(t)$ располагаются в простую последовательность $\{e_i(t)\}$ ($i=1, 2, \ldots$) в порядке возрастания номера n, а при одинаковом n в порядке возрастания k. Система $\{e_i(t)\}$ является ортогональной и образует базис в любом пространстве $L_p[0, 1]$ ($p \geqslant 1$). Более того, она образует базис в любом сепарабельном пространстве Орлича на $[0, 1]$.

До сих пор не решена проблема Шаудера: каждое ли сепарабельное пространство обладает базисом?

3. Признаки базисов. В этом пункте всюду $\{e_i\}$ ($i=1, 2, \ldots$) обозначает полную минимальную систему в банаховом пространстве E, а $\{f_i\}$ — систему функционалов, образующую с $\{e_i\}$ биортогональную систему.

Для каждого $x \in E$ определен ограниченный линейный оператор

$$S_n x = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i.$$

Оператор S_n является проекционным оператором: $S_n^2 = S_n$. Он проектирует все пространство на n-мерное пространство L_n, натянутое на элементы $e_1, \ldots, e_n$.

Для того чтобы система $\{e_i\}$ образовывала базис, необходимо и достаточно, чтобы операторы S_n были ограничены в совокупности, т. е. чтобы выполнялось неравенство

$$\|S_n x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i\right\| \leqslant M\|x\| \quad (x \in E),$$

где M — константа.

Если система $\{e_i\}$ не является базисом, то найдется такой элемент x, на котором $\|S_n x\| \leqslant M$ при всех $n=1, 2, \ldots$, но для которого ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_i(x) e_i$$

расходится. Если последний ряд сходится при любом $x \in E$, то система $\{e_i\}$ — базис. Более того, если этот ряд слабо сходится при любом $x \in E$, то система $\{e_i\}$ — базис. Последнее утверждение иногда формулируют так: всякий слабый базис является сильным базисом.

Если обозначить через L^n линейную замкнутую оболочку элементов $e_n, e_{n+1}, \ldots$, а через σ_n — единичную сферу в подпространстве L_n, то *для того, чтобы система* $\{e_i\}$ *была базисом, необходимо и достаточно, чтобы существовала положительная константа* α *такая, что*

$$\varrho(\sigma_n, L^n) \geqslant \alpha,$$

где ϱ — *расстояние между* σ_n *и* L^n.

Если $\{e_i\}$ — базис, то система $\{f_i\}$ является базисом в своей линейной замкнутой оболочке, которая может не совпадать с E'. Если E рефлексивно, то эта оболочка совпадает с E' и $\{f_i\}$ является базисом в E'. Если $\{f_i\}$ — базис в сопряженном пространстве E', то $\{e_i\}$ — базис пространства E.

4. Безусловные базисы. Система $\{e_i\}$ называется *безусловным базисом* в пространстве E, если она остается базисом при любой перестановке ее элементов.

Эквивалентным определением является следующее: базис $\{e_i\}$ называется безусловным, если ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) f(e_i)$$

абсолютно сходится для любых $x \in E$ и $f \in E'$.

Для того чтобы базис был безусловным, необходимо и достаточно, чтобы проекционные операторы вида

$$\sum_{i=1}^{k} f_{n_i}(x) e_{n_i}$$

при любых конечных наборах чисел $(n_1, \ldots, n_k)$ $(n_i \neq n_j$ при $i \neq j)$ были равномерно ограничены.

Если обозначить через $S_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ единичную сферу в линейной оболочке элементов базиса $e_{n_1}, \ldots, e_{n_k}$, а через $L^{n_1, \ldots, n_k}$ — замкнутую линейную оболочку всех остальных элементов базиса, то для безусловности базиса необходимо и достаточно, чтобы существовала такая константа $\beta > 0$, что

$$\varrho(S_{n_1, \ldots, n_k}, L^{n_1, \ldots, n_k}) \geqslant \beta$$

при всех конечных наборах $(n_1, \ldots, n_k)$.

Пусть U — линейный ограниченный оператор, действующий в пространстве E и имеющий ограниченный обратный. Если система $\{e_i\}$ — базис, то и система $\{Ue_i\}$ — базис. Если $\{e_i\}$ — безусловный базис, то и $\{Ue_i\}$ — безусловный базис.

В гильбертовом пространстве H всякий ортогональный базис является безусловным. Оказывается, что любой безусловный базис в гильбертовом пространстве может быть представлен в виде $\{Ue'_i\}$, где $\{e'_i\}$ — ортогональный нормированный базис. Такие базисы были названы *базисами Рисса*. Их можно охарактеризовать следующими свойствами: существуют положительные числа m и M такие, что для любого $x \in H$

$$m\sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 \leqslant \|x\|^2 \leqslant M\sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2.$$

Системы ортов в пространствах c_0 и l_p $(p \geqslant 1)$ являются безусловными базисами. Система функций Хаара (см. п. 2) образует безусловный базис во всех пространствах $L_p[0, 1]$ с $p > 1$. В пространствах $C[0, 1]$ и $L[0, 1]$ не существует безусловного базиса.

Тригонометрическая система функций является базисом в пространствах $L_p[-\pi, \pi]$ $(p > 1)$, но не безусловным.

Если система $\{e_i\}$ — безусловный базис в E, то система функционалов $\{f_i\}$, образующая биортогональную систему с $\{e_i\}$, при условии сепарабельности пространства E' будет безусловным базисом в E'.

5. Устойчивость базиса. Пусть система $\{e_i\}$ образует базис в пространстве E. Если $\{h_i\}$ — некоторая система элементов из E, то ставится вопрос о том, при каких условиях система $\{e_i + h_i\}$ будет также базисом в E. Если $\{e_i\}$ — базис (безусловный базис) и элементы h_i «достаточно малы» в том смысле, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\| \|h_i\| < 1,$$

то система $\{e_i + h_i\}$ образует базис (безусловный базис) в E.

Из последнего утверждения вытекает важное следствие: *если пространство E обладает каким-то базисом (безусловным базисом) и $\{\varphi_k\}$ — полная в E система элементов, то в E существует базис (безусловный базис) вида*

$$e_i = \sum_{k=1}^{n_i} c_k^{(i)} \varphi_k.$$

Например, в пространстве $C[0, 1]$ существует базис из степенных многочленов.

ГЛАВА II

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Абстрактное гильбертово пространство

1. Понятие гильбертова пространства. Пусть H — линейная система с умножением на комплексные числа, каждой паре элементов которой поставлено в соответствие комплексное число (x, y), обладающее свойствами:

а) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, в частностн, (x, x) вещественно;

б) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

в) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$ для любого комплексного числа λ;

г) $(x, x) \geqslant 0$, причем $(x, x) = 0$ только при $x = \theta$.

Число (x, y) называется *скалярным произведением*. Если H — линейная система, допускающая лишь умножение на вещественные числа, то скалярное произведение предполагается вещественным.

Из аксиом а) — г) вытекают следствия:

1) $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$;

2) $(x, \lambda y) = \overline{\lambda} (x, y)$;

3) неравенство Буняковского — Шварца

$$|(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)} \sqrt{(y, y)}.$$

По скалярному произведению в H можно ввести норму

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)},$$

после чего H становится линейным нормированным пространством. Если H бесконечномерно и полно по введенной норме, то оно называется *гильбертовым пространством* (комплексным или вещественным). Из определения видно, что всякое гильбертово пространство является банаховым.

2. Примеры гильбертовых пространств. Как известно, в n-мерном евклидовом пространстве скалярное произведение двух векторов $x=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ и $y=\{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$ обычно находится по формуле

$$(x, y)=\sum_{i=1}^{n} \xi_i\eta_i,$$

а в n-мѐрном унитарном (комплексном евклидовом) пространстве — по формуле

$$(x, y)=\sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_i.$$

Аналогично вводится скалярное произведение в ряде бесконечномерных пространств, после чего они становятся гильбертовыми.

1. Комплексное пространство l_2 становится гильбертовым, если положить

$$(x, y)=\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i\overline{\eta}_i.$$

2. Пространство $L_2(a, b)$ комплекснозначных функций становится гильбертовым, если положить

$$(x, y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt.$$

3. Комплексное пространство $L_{2,\rho}(a, b)$ функций, измеримых на отрезке $[a, b]$ и имеющих на этом отрезке суммируемый с весом $\rho(t)$ ($\rho(t)>0$ почти всюду) квадрат модуля, будет гильбертовым, если положить

$$(x, y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\rho(t)\,dt.$$

4. Пространства $W_2^l(G)$ С. Л. Соболева (см. гл. I, § 2, п. 6) будут гильбертовыми по отношению к скалярному произведению

$$(x, y)=\int_G x(t)\,y(t)\,dt+\int_G\Big(\sum_{|\alpha|=l} D^\alpha x(t)D^\alpha y(t)\Big)\,dt.$$

Здесь

$$D^{\alpha}x = \frac{\partial^l x}{\partial t_1^{k_1} \ldots \partial t_n^{k_n}}, \qquad |\alpha| = k_1 + \ldots + k_n.$$

5. Пространство функций $x(t)$, определенных и измеримых на всей оси $(-\infty, \infty)$ и таких, что существует предел

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt < \infty,$$

будет гильбертовым, если положить

$$(x, y) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) \overline{y(t)} \, dt.$$

Пространства из примеров 1—4 сепарабельны, пространство из примера 5 не сепарабельно.

3. Ортогональность. Проекция на подпространство. Два элемента x и y гильбертова пространства называются *ортогональными*, $x \perp y$, если $(x, y) = 0$. Элемент $x \in H$ называется *ортогональным подмножеству* $G \subset H$, $x \perp G$, если $(x, y) = 0$ для любого $y \in G$. Наконец, два подмножества G и Γ пространства H называются *ортогональными*, $G \perp \Gamma$, если любой элемент $x \in G$ ортогонален любому элементу $y \in \Gamma$.

Пусть L — подпространство H. Совокупность всех элементов, ортогональных к L, образует подпространство M, называемое *ортогональным дополнением* к L. Подпространства L и M имеют общим лишь один элемент θ.

Одним из основных свойств гильбертова пространства является следующее.

Если L — подпространство пространства H, то для всякого $x \in H$ существует единственное представление

$$x = y + z,$$

где $y \in L$, а $z \perp L$.

Элемент y называется *проекцией x на L*. Он обладает тем свойством, что по сравнению с другими элементами L находится на наименьшем расстоянии от x.

Каждый элемент H разлагается в сумму элементов из подпространства L и его ортогонального дополнения M. Иначе говорят, что H разлагается в *ортогональную сумму*

L и M: $H = L \dotplus M$. В соответствии с этим обозначают $M = H \dot{-} L$.

Из предыдущего вытекает весьма полезное следствие: *для того чтобы линейное многообразие L было всюду плотно в пространстве H, необходимо и достаточно, чтобы не существовало элемента, отличного от нулевого и ортогонального всем элементам множества L.*

4. Линейные функционалы. Из неравенства Буняковского — Шварца следует, что линейный функционал $f(x) = (x, u)$ при фиксированном $u \in H$ является ограниченным. Оказывается, что этим исчерпываются все линейные ограниченные функционалы на H, т. е. для всякого $f(x) \in H^*$ найдется единственный элемент $u \in H$ такой, что

$$f(x) = (x, u),$$

при этом $\|f\|_{H^*} = \|u\|_H$.

Таким образом, сопряженное пространство H^* изометрично самому пространству H. Сопряженное пространство рассматривается здесь в смысле, изложенном в гл. I, § 5, п. 12. Гильбертово пространство является *самосопряженным* и, следовательно, рефлексивным.

Всякий линейный функционал f, определенный на $L_2(a, b)$, может быть представлен в виде

$$f(x) = \int_a^b x(t)\,\overline{u}(t)\,dt,$$

где $u(t) \in L_2(a, b)$ и $\|f\| = \left(\int_a^b |u(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$.

Всякий линейный функционал f, определенный на l_2, может быть представлен в виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{c}_i,$$

где $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$ и $\|f\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2\right)^{1/2}$.

З а м е ч а н и е. Иногда удобно линейные функционалы на гильбертовом пространстве H представлять не через скалярное произведение пространства H, а через скалярное произведение в некотором другом гильбертовом пространстве. Тогда сопряженное к H пространство H^* будет уже реализоваться с помощью элементов другой природы. Например, в пространстве $W_2^l(G)$ удобно линейный функционал $f(x)$ представлять через скалярное произведение в $L_2(G)$, т. е. в виде

$$f(x)=\int\limits_G x(t)\,\overline{u}(t)\,dt.$$

При этом $u(t)$ будет уже, вообще говоря, обобщенной функцией (см. гл. VIII). Совокупность этих функций образует пространство $W_2^{-l}=(W_2^l)^*$.

5. Слабая сходимость. В соответствии с общим определением слабой сходимости (см. гл. I, § 4, п. 3) последовательность элементов $\{x_n\}\subset H$ называется *слабо сходящейся к элементу* x_0 *(в себе)*, если $(x_n, y)\to(x_0, y)$ (соответственно $(x_{n+p}, y)-(x_n, y)\to 0$) для любого элемента $y\in H$.

Из рефлексивности гильбертова пространства вытекают следующие свойства слабой сходимости:

1) Если последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к x_0 и $\|x_n\|\to\|x_0\|$, то $\|x_n-x_0\|\to 0$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0 сильно.

2) Пространство H слабо полно, т. е. последовательность $\{x_n\}$, слабо сходящаяся в себе, слабо сходится к некоторому пределу.

3) Пространство H слабо компактно, т. е. из любого ограниченного по норме бесконечного множества элементов пространства H можно выделить слабо сходящуюся последовательность.

6. Ортонормальные системы. Система $e_1, e_2, \ldots, e_n$ элементов гильбертова пространства H называется *ортонормальной* (или *ортонормированной*), если

$$(e_i, e_j)=\delta_{ij},$$

где δ_{ij} — известный символ, равный единице при $i=j$ и нулю при $i\neq j$. Примером такой системы может служить тригонометрическая система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2t,\ldots$$

в вещественном пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ или система

$$e^{2\pi i n t}, \qquad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

в комплексном пространстве $L_2(0, 1)$.

Если в H дана произвольная система линейно независимых элементов $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$, то из нее легко можно получить ортонормальную систему с помощью так называемого *процесса ортогонализации Шмидта*. Именно, полагают $e_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|}$, затем подбирают c_{21} так, чтобы $h_2 - c_{21}e_1$ было ортогонально e_1, что всегда возможно, и полагают $e_2 = \frac{h_2 - c_{21}e_1}{\|h_2 - c_{21}e_1\|}$. Далее подбирают c_{32} и c_{31} так, чтобы $h_3 - c_{32}e_2 - c_{31}e_1$ было ортогонально e_2 и e_1, и полагают $e_3 = \frac{h_3 - c_{32}e_2 - c_{31}e_1}{\|h_3 - c_{32}e_2 - c_{31}e_1\|}$ и т. д.

Пример. Если в пространстве $L_2(-1, 1)$ ортогонализовать систему степеней $1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots$, то получится система нормированных полиномов Лежандра. Ортогонализация этой системы в пространстве $L_{2,\rho}(-\infty, \infty)$ с весом $\rho(t) = e^{-t^2}$ дает систему полиномов Чебышева — Эрмита.

Если $\{e_i\}$ — ортонормальная система в H, то числа $c_i = (x, e_i)$ называются *коэффициентами Фурье элемента* x по этой системе. Линейная комбинация $\sum_{i=1}^{n} c_i e_i$ дает наилучшую аппроксимацию x по сравнению с другими комбинациями вида $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, т. е.

$$\delta_n = \left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\| \leqslant \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|.$$

Иначе говоря, $\sum_{i=1}^{n} c_i e_i$ есть проекция элемента x на подпространство L_n, натянутое на элементы $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Для δ_n справедлива формула

$$\delta_n^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2.$$

Если элемент x принадлежит замкнутой линейной оболочке L элементов e_i $(i=1, 2, \ldots)$, то

$$x=\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \quad \text{и} \quad \|x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2.$$

Если $x \overline{\in} L$, то элемент $x'=\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ будет проекцией x на L, причем

$$\|x\|^2 \geqslant \|x'\|^2=\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2.$$

Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ называется *рядом Фурье* для элемента x, а последнее неравенство — *неравенством Бесселя*.

Напомним, что если L совпадает со всем H, т. е. линейные комбинации элементов e_i плотны в H, то система $\{e_i\}$ называется *полной. Необходимым и достаточным условием полноты является равенство Парсеваля*

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$$

для любого $x \in H$.

Полная ортонормальная система $\{e_i\}$ является базисом гильбертова пространства. В каждом сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортонормальный базис. Все сепарабельные гильбертовы пространства изометричны пространству l_2.

§ 2. Линейные ограниченные операторы в гильбертовом пространстве

1. Линейный ограниченный оператор. Сопряженный оператор. Билинейная форма. Для линейного ограниченного оператора A, действующего в гильбертовом пространстве H, согласно общему определению,

$$\|A\|=\sup_{\|x\|=1} \|Ax\|=\sup_{(x,\,x)=1} \sqrt{(Ax,\, Ax)}=\sup_{x \in H} \sqrt{\frac{(Ax,\, Ax)}{(x,\, x)}}.$$

Если в скалярном произведении (Ax, y) зафиксировать y, то получится линейный функционал от x:

$$f(x) = (Ax, y),$$

причем

$$|f(x)| = |(Ax, y)| \leqslant \|A\| \|x\| \|y\|.$$

Этот функционал может быть представлен в виде

$$(Ax, y) = (x, u),$$

где $u \in H$. Соответствие $y \longrightarrow u$ порождает линейный ограниченный оператор $u = A^*y$. По определению

$$(Ax, y) = (x, A^*y).$$

Оператор A^* называется *сопряженным оператором* к A. Это определение согласуется с приведенным в гл. I, § 5, п. 12.

Функция $l(x, y)$ от двух элементов x и y гильбертова пространства H называется *билинейной формой*, если

$$l(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \alpha_1 \bar{\beta}_1 l(x_1, y_1) + \alpha_2 \bar{\beta}_1 l(x_2, y_1) + \\ + \alpha_1 \bar{\beta}_2 l(x_1, y_2) + \alpha_2 \bar{\beta}_2 l(x_2, y_2).$$

Билинейная форма *ограничена*, если

$$|l(x, y)| \leqslant c \|x\| \|y\|.$$

Наименьшее возможное значение c в этом неравенстве, или, что то же, $\sup\limits_{\|x\|=\|y\|=1} |l(x, y)|$, называется *нормой* билинейной формы.

Если A — линейный ограниченный оператор, то форма

$$l(x, y) = (Ax, y)$$

является билинейной ограниченной формой. Наоборот, всякой ограниченной билинейной форме $l(x, y)$ соответствует единственный линейный ограниченный оператор A, для которого справедливо предыдущее равенство. При этом норма билинейной формы равна норме оператора.

Значения билинейной формы $l(x, y)$ вполне определяются значениями соответствующей квадратичной формы (Ax, x).

Действительно,

$$l(x, y)=[l(x_1, x_1)-l(x_2, x_2)]+i[l(x_3, x_3)-l(x_4, x_4)],$$

где $x_1=\frac{1}{2}(x+y)$; $x_2=\frac{1}{2}(x-y)$; $x_3=\frac{1}{2}(x+iy)$;

$$x_4=\frac{1}{2}(x-iy).$$

Оператор A однозначно определяется своей квадратичной формой (Ax, x): если $(Ax, x)=(Bx, x)$, то $A=B$ *).

Пусть пространство H сепарабельно и $\{e_i\}$ — ортонормальный базис в H. Тогда

$$Ae_k=\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}e_i,$$

при этом

$$a_{ik}=(Ae_k, e_i).$$

Если $x=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j e_j$ и $y=\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j e_j$, то

$$Ax=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\xi_j a_{ij}e_i \quad \text{и} \quad (Ax, y)=\sum_{i, j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j\bar{\eta}_i.$$

Матрица (a_{ik}) называется *матрицей оператора* A в базисе $\{e_i\}$. Матрицей сопряженного оператора A^* будет матрица $(a^*_{ik})=(\bar{a}_{ki})$. Для ограниченности оператора A (а значит, и оператора A^*) необходимо, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^2<\infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty}|a_{ki}|^2<\infty \qquad (i=1, 2, \ldots).$$

Эти условия не являются, однако, достаточными для ограниченности оператора, заданного матрицей. Примерами достаточных условий являются:

1. Если

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|\leqslant M \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty}|a_{ki}|\leqslant M \quad (i=1, 2, \ldots),$$

где M не зависит от i, то оператор A ограничен.

---

*) Последние утверждения справедливы лишь в комплексном гильбертовом пространстве.

2. Если

$$\sum_{i,\,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty,$$

то оператор A ограничен. Число $\left\{\sum_{i,\,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2\right\}^{1/2}$ называют иногда *абсолютной нормой* оператора A. Эта норма не зависит от выбора ортогонального базиса $\{e_i\}$ в H.

Эффективно проверяемые необходимые и достаточные условия ограниченности оператора, заданного в матричной форме, неизвестны.

В функциональном пространстве наиболее распространенным классом линейных операторов являются интегральные операторы вида

$$Ax = \int_a^b K(t,\ s)\, x(s)\, ds.$$

Для ограниченности интегрального оператора в гильбертовом пространстве $L_2(a,\ b)$ достаточно, чтобы существовало число M такое, что

$$\int_a^b |K(x,\ y)|\, dy \leqslant M \quad \text{и} \quad \int_a^b |K(x,\ y)|\, dx \leqslant M.$$

Достаточным условием ограниченности является также суммируемость квадрата ядра $K(t,\ s)$ по двум переменным:

$$\int_a^b \int_a^b |K(t,\ s)|^2\, dt\, ds < \infty.$$

2. Унитарные операторы. Линейный оператор U, отображающий все гильбертово пространство H на все H с сохранением нормы:

$$\|Ux\| = \|x\|,$$

называется *унитарным*.

Примером унитарного оператора в координатном гильбертовом пространстве l_2 служит оператор, переводящий элемент x в элемент y путем фиксированной перестановки координат элемента x.

В комплексном пространстве $L_2(a, b)$ унитарным оператором является оператор умножения на функцию e^{ict}, c — действительное число.

В пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ унитарным является оператор сдвига

$$A_s x = x(t+s).$$

Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t+s)|^2\, dt.$$

Аналогичные унитарные операторы возникают при рассмотрении операторов сдвига функций, определенных на группах с инвариантной мерой или на динамических системах.

Унитарные операторы обладают свойствами:

1) $(Ux, Uy) = (x, y)$ $(x, y \in H)$.

2) Существует оператор U^{-1}, обратный к унитарному, причем

$$U^{-1} = U^*$$

(это свойство может служить определением унитарного оператора).

3) Произведение унитарных операторов есть снова унитарный оператор. Унитарные операторы образуют группу.

Если λ есть *собственное число* унитарного оператора U, т. е. существует элемент $e \neq \theta$ такой, что

$$Ue = \lambda e,$$

то $|\lambda| = 1$.

В пространстве $L_2(a, b)$ можно дать аналитическое описание всех унитарных операторов (см. [39]).

Ряд функциональных преобразований, применяемых в анализе, порождает унитарные операторы. Из них особенно важным является преобразование Фурье—Планшереля, задающееся формулой

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-its} - 1}{-is} f(s)\, ds = Uf(x)$$

или более простой формулой

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-its}f(s)\,ds,$$

в которой интеграл нужно понимать как предел в среднем (по t) интеграла от $-N$ до N при $N\to\infty$. Оператор U является унитарным в $L_2(-\infty, \infty)$. Обратный к нему оператор задается формулой

$$U^{-1}g(t)=f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{its}g(s)\,ds.$$

Обобщением унитарного оператора является *изометрический* оператор. Это линейный оператор, отображающий с сохранением скалярного произведения, а следовательно и нормы, подпространство H_1 гильбертова пространства H на подпространство H_2 того же или другого гильбертова пространства. В случае, когда $H_1=H_2=H$, изометрический оператор превращается в унитарный.

3. Самосопряженные операторы. Линейный ограниченный оператор, совпадающий со своим сопряженным, $A=A^*$, называется *самосопряженным*. Для самосопряженного оператора

$$(Ax, y)=(x, Ay)=\overline{(Ay, x)}.$$

Билинейная форма, обладающая тем свойством, что

$$l(x, y)=\overline{l(y, x)},$$

называется *эрмитовой*. Всякой ограниченной эрмитовой форме соответствует ограниченный самосопряженный оператор. Квадратичная форма (Ax, x), соответствующая самосопряженному оператору, вещественна. *Нижней* и *верхней границами* самосопряженного оператора называются соответственно числа

$$m=\inf_{\|x\|=1}(Ax, x) \quad \text{и} \quad M=\sup_{\|x\|=1}(Ax, x).$$

Норма оператора A равна наибольшему из чисел $|m|$ и $|M|$:

$$\|A\|=\max(|m|, |M|)=\sup_{\|x\|=1}|(Ax, x)|.$$

Если нижняя граница неотрицательна, т. е.

$$(Ax, x) \geqslant 0$$

при любом $x \in H$ и $A \neq 0$, то оператор называется *положительным*.

Если ограниченный оператор задан матрицей (a_{ik}), то он будет самосопряженным в том и только в том случае, когда соответствующая ему матрица эрмитова, т. е.

$$a_{ik} = \overline{a_{ki}}.$$

Ограниченный интегральный оператор в $L_2(a, b)$ с ядром $K(t, s)$ будет самосопряженным, если $K(t, s) = \overline{K(s, t)}$. Всякий ограниченный самосопряженный оператор в $L_2(a, b)$ может быть представлен в виде интегрального оператора, но под ядром $K(t, s)$ уже следует понимать не обычную функцию, а обобщенную (см. гл. VIII).

Собственные числа самосопряженного оператора вещественны, собственные элементы, соответствующие различным собственным числам, взаимно ортогональны.

Пусть A — любой ограниченный оператор. Его можно представить в виде

$$A = \frac{A + A^*}{2} + i\,\frac{A - A^*}{2i} = A_1 + iA_2,$$

при этом операторы A_1 и A_2 являются самосопряженными. Операторы $\operatorname{Re} A = \frac{A + A^*}{2}$ и $\operatorname{Im} A = \frac{A - A^*}{2i}$ называются *действительной* и *мнимой частью* оператора A.

Если A — любой ограниченный оператор, то операторы AA^* и A^*A являются самосопряженными и положительными.

Если $\operatorname{Re} A = \frac{A + A^*}{2}$ является отрицательным оператором, то оператор A называется *диссипативным*.

4. Самосопряженные вполне непрерывные операторы. Если самосопряженный оператор A вполне непрерывен, то все пространство H может быть разложено в ортогональную сумму двух подпространств: $H = H_0 \dot{+} H'$, так, что $Ax_0 = 0$ при любом $x_0 \in H_0$, а в пространстве H' существует ортонормальный базис $\{x_i\}$, состоящий из собственных элементов оператора A, соответствующих ненулевым собственным числам $\lambda_i \neq 0$. Таким образом, для любого $x \in H$

$$x = x_0 + \sum_i c_i x_i = x_0 + \sum_i (x, x_i) x_i$$

и

$$Ax = \sum_i \lambda_i c_i x_i = \sum_i \lambda_i (x, x_i) x_i.$$

В частности, отсюда следует, что самосопряженный вполне непрерывный оператор, не аннулирующийся на всем пространстве, имеет по крайней мере одно собственное число, отличное от нуля. Пространство H_0 состоит из собственных векторов оператора A, отвечающих собственному значению $\lambda = 0$. Выбирая в этом пространстве произвольный ортонормальный базис $\{e'_i\}$, мы получим ортонормальный базис $\{e'_i\} + \{e_i\}$ в пространстве H, состоящий из собственных векторов оператора A.

Собственные числа и собственные векторы самосопряженного вполне непрерывного оператора могут быть получены следующим процессом: форма $A(x, x)$ на единичной сфере пространства H достигает наибольшего по абсолютной величине значения на некотором элементе x_1. Оказывается, что $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, где $\lambda_1 = (Ax_1, x_1) = \pm \max\limits_{\|x\|=1} |A(x, x)| = \pm \|A\|$ (знак $+$ или $-$ совпадает со знаком (Ax_1, x_1)).

Пусть H_1 — ортогональное дополнение к x_1 в H. Подпространство H_1 инвариантно относительно оператора A. Если оператор A аннулируется на любом элементе из H_1, то процесс на этом останавливается; если же $Ax \not\equiv 0$, то форма $(Ax, x) \not\equiv 0$ и достигает на единичной сфере пространства H_1 наибольшего по абсолютной величине значения на элементе x_2. При этом $Ax_2 = \lambda_2 x_2$, где $\lambda_2 = \pm \max\limits_{\|x\|=1;\ x \in H_1} |(Ax, x)|$ и $x_2 \in H_1$.

Из построения следует, что $|\lambda_2| \leqslant |\lambda_1|$.

Продолжение процесса приводит к конечной или счетной полной в H' системе собственных чисел и собственных элементов оператора A.

Пусть $\lambda_1^+, \lambda_2^+, \ldots$ — положительные собственные числа оператора A, расположенные в порядке убывания, а λ_1^-, $\lambda_2^-, \ldots$ — отрицательные собственные числа, расположенные в порядке возрастания (кратные собственные числа повторяются столько раз, какова их кратность). Собственные числа обладают следующим *минимаксимальным свойством:* пусть $z_1, \ldots, z_n$ — любые элементы H и $M(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — максимум формы (Ax, x) на всех элементах x, удовлетворяющих условиям

$$\|x\|=1 \quad \text{и} \quad (x, z_1)=(x, z_2)=\ldots=(x, z_n)=0.$$

Тогда наименьшее значение функции $M(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ при всевозможных системах $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ элементов из H будет равно $\overset{+}{\lambda}_n$. Аналогично $\overset{-}{\lambda}_n = \max\limits_{z_i \in H} m(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, где $m(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — миниимум формы (Ax, x) на элементах x, удовлетворяющих предыдущим условиям.

Самосопряженный вполне непрерывный оператор будет положительным тогда и только тогда, когда все его собственные числа не отрицательны.

Свойства самосопряженных вполне непрерывных операторов являются обобщением свойств интегральных операторов с симметрическим ядром, рассматриваемых в теории интегральных уравнений. Обобщением интегрального уравнения является уравнение

$$x-\mu Ax=y.$$

Если A — самосопряженный вполне непрерывный оператор и число $1/\mu$ не совпадает ни с одним из его собственных чисел, то для решения написанного уравнения справедлива формула

$$x=y+\mu\sum_i \frac{\lambda_i}{1-\mu\lambda_i}(y, x_i)\,x_i.$$

Если $1/\mu$ совпадает с одним из собственных чисел оператора A, то решение существует лишь при том условии, что элемент y ортогонален всем собственным элементам, соответствующим собственному числу $1/\mu$. В этом случае одно из решений может быть получено по той же формуле, если в ней отбросить члены, содержащие $\lambda_i=\frac{1}{\mu}$.

5. Вполне непрерывные операторы. Кроме основного определения вполне непрерывного оператора, согласно которому оператор называется вполне непрерывным, если он переводит всякое ограниченное множество в компактное, в гильбертовом пространстве существуют эквивалентные определения.

1. Линейный оператор A вполне непрерывен, если он переводит всякую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся, т. е. если из $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$ следует $Ax_n \longrightarrow Ax_0$ по норме.

2. Линейный оператор A вполне непрерывен, если для любых последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, слабо сходящихся к x_0 и y_0, справедливо равенство

$$\lim_{n \to \infty} (Ax_n, y_n) = (Ax_0, y_0),$$

т. е. форма (Ax, x) является слабо непрерывной функцией x и y.

Если A вполне непрерывен, то и A^* вполне непрерывен.

Полезным является утверждение: если AA^* вполне непрерывен, то и A вполне непрерывен.

Конечномерный оператор в гильбертовом пространстве H может быть представлен в виде

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} (x, x_k)\, y_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k,$$

где x_k и y_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — фиксированные элементы H. Для вполне непрерывных операторов возможно представление, аналогичное написанному представлению конечномерного оператора. Числа $\mu > 0$, при которых существуют ненулевые решения системы

$$\begin{cases} Ax = \mu y, \\ A^* y = \mu x, \end{cases}$$

называются *особыми значениями* оператора A, а соответствующие решения x, y — *союзными фундаментальными элементами Шмидта*. Числа μ^2 являются собственными числами положительных самосопряженных вполне непрерывных операторов AA^* и A^*A. Поэтому существует лишь счетное число особых значений μ_i, причем $\mu_i \longrightarrow 0$ при $i \longrightarrow \infty$.

Имеет место представление

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i x_i \otimes y_i;$$

где x_i, y_i — союзные фундаментальные элементы, соответствующие особым числам μ_i. Ряд сходится по норме операторов. В развернутой форме предыдущее равенство имеет вид

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (x, x_i) y_i.$$

Для сопряженного оператора имеет место аналогичное представление

$$A^*x = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i y_i \otimes x_i.$$

Если A самосопряжен, то $x_i = y_i$, и получается рассмотренное ранее представление.

Если оператор A задан матрицей (a_{ik}), то для его полной непрерывности достаточно, чтобы

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty.$$

Аналогично для полной непрерывности интегрального оператора в $L_2(a, b)$ достаточно, чтобы

$$\int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2 \, dt \, ds < \infty.$$

Оба эти условия не являются необходимыми.

Интегральный оператор с симметрическим ядром, удовлетворяющим последнему условию, называется *оператором Гильберта—Шмидта.*

Важным в теории вполне непрерывных операторов является вопрос о полноте системы собственных и присоединенных элементов вполне непрерывного оператора (см. гл. I, § 5, п. 8). Для самосопряженного вполне непрерывного оператора существует базис из собственных векторов. Однако если к самосопряженному вполне непрерывному оператору добавить конечномерный, то полученный оператор уже может не иметь полной системы собственных и присоединенных векторов. Так, например, если к интегральному оператору с симметрическим ядром

$$K(t, s) = \begin{cases} (t-1)s & \text{при } s \leqslant t, \\ (s-1)t & \text{при } s \geqslant t \end{cases} \qquad (0 \leqslant s, t \leqslant 1)$$

добавить одномерный оператор

$$t\int_0^1 (1-s)\,x(s)\,ds,$$

то получится оператор Вольтерра

$$\int_0^t (t-s)\,x(s)\,ds,$$

который вообще не имеет собственных функций.

Из имеющегося ряда критериев полноты здесь приводятся следующие: пусть A — такой вполне непрерывный оператор, что значения формы (Ax, x) при любом $x \in H$ содержатся в секторе комплексной плоскости ξ:

$$|\arg \xi| \leqslant \frac{\pi}{2\varrho} \quad (\varrho \geqslant 1).$$

Система собственных и присоединенных элементов оператора A полна в пространстве H, если его особые числа μ_n, расположенные в порядке убывания, обладают свойством

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/\varrho}\mu_n = 0,$$

в частности, если сходится ряд

$$\sum \mu_n^{1/\varrho} < \infty.$$

Эти условия не очень удобны тем, что в них фигурируют особые числа оператора A. При $\varrho > 1$ в этих условиях можно особые числа заменить на собственные числа вещественной или мнимой части оператора A $\left(\text{операторов } \frac{A+A^*}{2} \text{ или } \frac{A-A^*}{2i}\right)$.

При $\varrho = 1$, т. е. для диссипативного оператора, система собственных и присоединенных элементов полна, если он имеет конечный *след*

$$\sum \mu_n < \infty.$$

Однако это утверждение становится несправедливым, если заменить особые числа на собственные числа вещественной или мнимой части оператора A. Если же и вещественная, и мнимая части диссипативного оператора A имеют конечный след, то система его собственных и присоединенных векторов полна в пространстве H.

6. Проекционные операторы. Самосопряженными операторами, имеющими наиболее простую структуру, являются проекционные операторы. Пусть L — подпространство пространства H. Оператором проектирования на подпространство L или, короче, *проекционным оператором* P_L называется оператор, ставящий в соответствие каждому элементу x его проекцию y на подпространство L:

$$y = P_L x.$$

Для элемента $x \in L$ по определению $P_L x = x$.

Проекционный оператор самосопряжен, его квадрат равен ему самому, и следовательно, он положителен. Наоборот, если линейный ограниченный оператор P обладает свойствами $P^* = P$ и $P^2 = P$, то он является оператором проектирования пространства H на свою область значений.

Норма проекционного оператора равна 1.

Если L конечномерно, то P_L конечномерен и, следовательно, вполне непрерывен. Если L бесконечномерно, то P_L не вполне непрерывен.

Если L_1 и L_2 — ортогональные подпространства, то $P_{L_1}P_{L_2} = 0$ и наоборот. В этом случае операторы P_{L_1} и P_{L_2} называются *ортогональными*.

Свойства проекционных операторов.

1) Для того чтобы сумма двух проекционных операторов P_{L_1} и P_{L_2} была проекционным оператором, необходимо и достаточно, чтобы эти операторы были ортогональными. Если это условие выполнено, то

$$P_{L_1} + P_{L_2} = P_{L_1 \dot{+} L_2}.$$

2) Для того чтобы произведение двух проекционных операторов P_{L_1} и P_{L_2} было проекционным оператором, необходимо и достаточно, чтобы операторы P_{L_1} и P_{L_2} были перестановочны. Если это условие выполнено, то

$$P_{L_1}P_{L_2} = P_{L_1 \cap L_2}.$$

Проекционный оператор P_1 называется *частью* проекционного оператора P_2, если

$$P_1P_2 = P_2P_1 = P_1.$$

3) Проекционный оператор P_1 является частью проекционного оператора P_2 тогда и только тогда, когда подпространство L_1 есть часть подпространства L_2.

4) Для того чтобы проекционный оператор P_{L_2} был частью проекционного оператора P_{L_1}, необходимо и достаточно, чтобы для всех $x \in H$ выполнялось неравенство

$$\| P_{L_2} x \| \leqslant \| P_{L_1} x \|.$$

5) Разность $P_{L_1} - P_{L_2}$ двух проекционных операторов есть проекционный оператор тогда и только тогда, когда P_{L_2} есть часть P_{L_1}.

Если это условие выполнено, то $P_{L_1} - P_{L_2}$ есть оператор проектирования на $L_1 \dot{-} L_2$ (ортогональное дополнение L_2 до L_1).

6) Ряд попарно ортогональных проекцонных операторов

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n$$

всегда сильно сходится, и сумма его есть проекционный оператор P. Подпространство L, на которое этот оператор проектирует, называется *ортогональной суммой подпространств* L_n, на которые проектируют операторы P_n:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{+} L_n.$$

§ 3. Спектральное разложение самосопряженных операторов

1. Операции над самосопряженными операторами. Сумма двух ограниченных самосопряженных операторов есть снова самосопряженный оператор. Более того, любая линейная комбинация самосопряженных операторов с вещественными коэффициентами является самосопряженным оператором. Сумма положительных операторов есть также положительный оператор.

Произведение ограниченных самосопряженных операторов будет самосопряженным в том и только в том случае, когда эти операторы перестановочны. Если при этом сомножители положительны, то и произведение положительно.

Совокупность самосопряженных операторов замкнута относительно слабой сходимости, т. е. предел слабо сходящейся (см. гл. I, § 4, п. 3) последовательности самосопряженных операторов есть самосопряженный оператор.

В совокупности самосопряженных операторов можно ввести соотношение порядка, полагая $A \geqslant B$, если $A-B$ — положительный оператор. При этом неравенства между операторами обладают основными свойствами обычных неравенств между вещественными числами. Однако если для двух разных вещественных чисел одно всегда больше другого, то этого в общем случае нельзя сказать о двух различных самосопряженных операторах, так как возможен случай, когда форма $((A-B)x, x)$ для одних x будет больше, а для других x меньше нуля. В этом случае операторы A и B называются *несравнимыми*. Так как существуют и сравнимые и несравнимые самосопряженные операторы, то говорят, что в множестве всех самосопряженных операторов имеется *частичное упорядочение* или *полуупорядочение*. Наличие полуупорядочения позволяет ввести в множестве самосопряженных операторов обычным путем ряд понятий, как, например, ограниченные сверху или снизу множества операторов, нижние и верхние грани ограниченного множества операторов, монотонно возрастающие и монотонно убывающие последовательности операторов и др.

Важным свойством ограниченных последовательностей самосопряженных операторов является следующее:

Если $\{A_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность попарно перестановочных самосопряженных операторов, ограниченная сверху самосопряженным оператором B, перестановочным со всеми A_n, то последовательность $\{A_n\}$ сильно сходится к самосопряженному оператору $A \leqslant B$ и

$$A = \sup_n A_n.$$

Каждому самосопряженному оператору A соответствует полуупорядоченное кольцо K_A всех ограниченных самосопряженных операторов, перестановочных с A. Кольцо K_A, вообще говоря, некоммутативно. Это кольцо содержит сам оператор A и любой многочлен

$$P(A) = a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n$$

от A с вещественными коэффициентами. Соответствие многочленов от оператора многочленам от вещественной переменной линейно и мультипликативно, т. е. если

$$P(t)=\alpha Q(t)+\beta R(t),$$

то

$$P(A)=\alpha Q(A)+\beta R(A),$$

и если

$$P(t)=Q(t)\,R(t),$$

то

$$P(A)=Q(A)\,R(A).$$

Более глубоким фактом является *положительность* этого соответствия в том смысле, что если $P(t)\geqslant 0$ на $[m, M]$, где m и M — нижняя и верхняя границы оператора A, то $P(A)\geqslant 0$. Из положительности соответствия следует, что если монотонно возрастающая последовательность многочленов $\{P_n(t)\}$, ограниченных в совокупности на отрезке $[m, M]$ числом K, сходится к функции $F(t)$, то последовательность многочленов $\{P_n(A)\}$ также монотонно возрастает, ограничена оператором KI и, следовательно, имеет предел $B=\lim\limits_n P_n(A)$. Этот оператор естественно обозначить через $F(A)$ и назвать *функцией от оператора* A. Оператор $F(A)$ принадлежит K_A и, более того, перестановочен с любым оператором из K_A.

В частности, для положительного оператора A можно ввести функцию $B=\sqrt{A}$. Оператор B положителен, и $B^2=A$. Он однозначно определяется этими свойствами. Определить $\sqrt{A}$ можно как предел последовательности многочленов B_n, определяемых из рекуррентного соотношения

$$B_0=0,$$
$$B_{n+1}=B_n+\frac{1}{2}(A-B_n^2).$$

Для любого самосопряженного оператора A оператор A^2 положителен, поэтому естественно обозначить $\sqrt{A^2}=|A|$.

2. Разложение единицы, спектральная функция. Важнейшим классом функций от операторов являются функции, соответствующие характеристическим функциям интервалов вещественной оси. Так как квадрат характеристической функции равен ей самой, то и квадрат соответствующего самосопряженного оператора будет равен ему самому, т. е. оператор будет проекционным. Обозначим, в частности, через E_λ оператор, соответствующий характеристической функции полуоси $(-\infty, \lambda)$ (т. е. функции, равной нулю при $t \geqslant \lambda$ и единице при $t < \lambda$).

Семейство проекционных операторов E_λ $(-\infty < \lambda < \infty)$ называется *разложением единицы, порожденным оператором* A, и обладает свойствами:

1) $E_\lambda \leqslant E_\mu$ или, что то же, $E_\lambda E_\mu = E_\lambda$ при $\lambda < \mu$;

2) E_λ непрерывен по λ слева, т. е. $E_{\lambda-0} = \lim\limits_{\mu \to \lambda-0} E_\mu = E_\lambda$;

3) $E_\lambda = 0$ при $\lambda \in (-\infty, m)$ и $E_\lambda = I$ при $\lambda \in (M, \infty)$, где m и M — нижняя и верхняя границы оператора A;

4) оператор E_λ перестановочен с любым оператором из K_A.

Оператор-функция E_λ называется *спектральной функцией* оператора A, оператор $E_\Delta = E_\beta - E_\alpha$ называется *спектральной мерой интервала* $\Delta = [\alpha, \beta]$. Мера эта обладает свойством ортогональности: если $\Delta_1 \cap \Delta_2 = 0$, то $E_{\Delta_1} E_{\Delta_2} = 0$.

Оператор A может быть восстановлен по своей спектральной функции или мере. Оказывается, что

$$A = \int_m^{M+0} \lambda \, dE_\lambda,$$

где справа стоит абстрактный интеграл Стилтьеса.

Под *абстрактным интегралом Стилтьеса*

$$\int_a^b f(\lambda) \, dE_\lambda$$

по спектральной мере понимается предел по норме операторов интегральных сумм

$$\sum_{k=1}^n f(\nu_k) E_{\Delta_k},$$

где Δ_k — частичные интервалы, на которые разбит интервал $[a, b]$, а ν_k — произвольная точка внутри Δ_k.

Из спектрального представления оператора следуют формулы

$$Ax = \int_m^{M+0} \lambda \, dE_\lambda x,$$

$$(Ax, x) = \int_m^{M+0} \lambda \, d(E_\lambda x, x),$$

$$\| Ax \|^2 = \int_m^{M+0} \lambda^2 \, d(E_\lambda x, x).$$

3. Функции от самосопряженного оператора. Спектральное представление оператора позволяет ввести более широкий класс функций от оператора, включающий ранее определенные функции. Полагают

$$f(A) = \int_m^{M+0} f(\lambda) \, dE_\lambda,$$

если последний интеграл существует. В частности, он существует для любой непрерывной функции. Соответствие между функциями вещественной переменной и функциями от оператора обладает следующими свойствами:

1) Если

$$f(\lambda) = af_1(\lambda) + bf_2(\lambda),$$

то

$$f(A) = af_1(A) + bf_2(A).$$

2) Если

$$f(\lambda) = f_1(\lambda) f_2(\lambda),$$

то

$$f(A) = f_1(A) f_2(A).$$

3) $\bar{f}(A) = [f(A)]^*$,

где черта над функцией означает переход к комплексно сопряженной функции.

4) $\| f(A) \| \leqslant \max\limits_{m \leqslant \lambda \leqslant M} |f(\lambda)|$.

5) Из $AB = BA$ следует $f(A)B = Bf(A)$ для любого линейного ограниченного оператора B.

6) Если $f(\lambda) \leqslant \varphi(\lambda)$ всюду на $[m, M]$, то $f(A) \leqslant \varphi(A)$.

4. Неограниченные самосопряженные операторы. Если A — линейный неограниченный оператор с всюду плотной в H областью определения $D(A)$, то его сопряженный оператор A^* будет определен на тех элементах y, для которых функционал (Ax, y) является ограниченным (см. гл. I, § 5, п. 10). В гильбертовом пространстве это означает, что

$$(Ax, y) = (x, y^*),$$

где $y^* \in H$ и $A^* y = y^*$.

Неограниченный оператор называется *самосопряженным*, если $A = A^*$. В отличие от случая ограниченных операторов это означает не только наличие тождества

$$(Ax, y) = (x, Ay) \qquad (x, y \in D(A)),$$

но и совпадение областей определения $D(A)$ и $D(A^*)$ операторов A и A^*. Таким образом, при проверке самосопряженности оператора необходимо для каждого элемента y, для которого функционал (Ax, y) ограничен, показать, что $y \in D(A)$, а затем проверить справедливость предыдущего тождества.

Неограниченный самосопряженный оператор всегда замкнут.

Для неограниченных самосопряженных операторов остаются верными с некоторыми видоизменениями основные результаты спектральной теории, изложенной выше для ограниченных самосопряженных операторов, в частности, верна спектральная теорема. А именно: пусть A — неограниченный самосопряженный оператор с областью определения $D(A)$. Тогда этот оператор порождает семейство проекционных операторов E_λ, $-\infty < \lambda < +\infty$, обладающих свойствами:

1) $E_\lambda \leqslant E_\mu$ для $\lambda < \mu$;

2) E_λ непрерывен слева;

3) $E_{-\infty} = \lim\limits_{\lambda \to -\infty} E_\lambda = 0$, $E_{+\infty} = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} E_\lambda = E$;

4) $BE_\lambda = E_\lambda B$, если B — любой ограниченный оператор, перестановочный с A. При этом ограниченный оператор B называется *перестановочным* (или *коммутирующим*) с неограниченным оператором A, если из $x \in D(A)$ следует $Bx \in D(A)$ и $ABx = BAx$.

Элемент x принадлежит $D(A)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d(E_\lambda x, x) < \infty.$$

Для этих x

$$Ax = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda x \quad \text{и} \quad \|Ax\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d(E_\lambda x, x).$$

Интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda x$ понимают как предел собственного интеграла $\int_a^b \lambda \, dE_\lambda x$ в смысле сильной сходимости при $a \to -\infty$, $b \to \infty$.

Самосопряженный оператор A называется *полуограниченным снизу*, если $(Ax, x) \geqslant a(x, x)$ при всех $x \in D(A)$. В этом случае

$$Ax = \int_a^{\infty} \lambda \, dE_\lambda x.$$

Аналогично определяется *полуограниченный сверху* оператор.

Если функция $f(\lambda)$ конечна и измерима по отношению ко всем мерам, порожденным функциями $\sigma(\lambda) = (E_\lambda z, z)$ ($z \in H$), то можно определить оператор $f(A)$. Этот оператор, вообще говоря, не ограничен. Его областью определения $D(f(A))$ служит совокупность элементов x, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) \, d(E_\lambda x, x) < \infty.$$

Множество $D(f(A))$ плотно в H, оператор $f(A)$ задается формулой

$$(f(A)x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \, d(E_\lambda x, y)$$

$$(x \in D(f(A)), \ y \in H)$$

и является самосопряженным (для вещественной функции $f(\lambda)$).

Если функция $f(\lambda)$ ограничена $(-\infty<\lambda<\infty)$, то оператор $f(A)$ будет также ограниченным.

Важнейшим примером ограниченной функции от оператора является резольвента. Если λ_0 не принадлежит спектру оператора A, то для резольвенты R_{λ_0} справедливо спектральное представление

$$R_{\lambda_0}x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda-\lambda_0}\,dE_\lambda x.$$

Отсюда, в частности, следует оценка резольвенты:

$$\|R_{\lambda_0}x\|\leqslant\frac{1}{d}\|x\|,$$

где d — расстояние от точки λ_0 до спектра оператора A. При этом $d\geqslant|\operatorname{Im}\lambda_0|$ и, следовательно, $\|R_{\lambda_0}\|\leqslant\frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda_0|}$.

Если оператор A полуограничен снизу, то ограниченным оператором будет функция e^{-A}:

$$e^{-A}x=\int_{a}^{\infty}e^{-\lambda}dE_\lambda x.$$

Совокупность всех функций от самосопряженного оператора A допускает «внешнее» описание. Если через $R(A)$ обозначить совокупность всех линейных ограниченных операторов, коммутирующих с A, то множество функций от A совпадает с совокупностью всех замкнутых операторов, коммутирующих с любым оператором из $R(A)$.

5. Спектр самосопряженного оператора. Спектр самосопряженного оператора A представляет собой замкнутое множество вещественной оси, состоящее из всех точек роста функции E_λ. Скачки функции E_λ соответствуют собственным числам оператора A; оператор $E_{\lambda+0}-E_{\lambda-0}$ является оператором проектирования на собственное подпространство, отвечающее собственному числу λ. Собственные числа образуют *дискретный*, или *точечный*, спектр оператора A.

Если собственные векторы оператора A образуют полную систему в пространстве H, то говорят, что оператор имеет *чисто точечный* спектр. В этом случае спектр оператора состоит из множества собственных чисел и предельных точек этого множества.

В общем случае пространство H может быть разбито в ортогональную сумму инвариантных относительно A подпространств H_1 и H_2 таких, что в H_1 оператор A имеет чисто точечный спектр, а в H_2 не имеет собственных элементов. Спектр оператора A в подпространстве H_2 называется *непрерывным спектром.* Непрерывный спектр и точечный могут пересекаться.

Точки непрерывного спектра, предельные точки множества собственных чисел и собственные числа бесконечной кратности образуют *предельный спектр* оператора A.

Предельный спектр самосопряженного оператора состоит из одной точки 0 лишь в том случае, когда оператор вполне непрерывен.

Пример. В пространстве $L_2[0, 1]$ интегральный оператор с симметрическим ядром $K(t, \tau)$, обладающим тем свойством, что

$$\int_0^1 |K(t, \tau)|^2 d\tau$$

существует при почти всех $t \in [0, 1]$, порождает самосопряженный оператор, называемый *оператором Карлемана.* Этот оператор может быть неограниченным. Точка 0 всегда является точкой предельного спектра оператора Карлемана.

Для того чтобы точка λ_0 была точкой спектра оператора A, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность элементов $x_n \in D(A)$ с $\|x_n\| = 1$ такая, что $\|Ax_n - \lambda_0 x_n\| \to 0$. Для того чтобы λ_0 была точкой предельного спектра, необходимо и достаточно, чтобы существовала слабо сходящаяся к нулю последовательность элементов x_n, обладающая предыдущими свойствами.

Прибавление к самосопряженному оператору вполне непрерывного оператора не изменяет предельного спектра оператора. С другой стороны, к любому самосопряженному оператору можно добавить вполне непрерывный оператор со сколь угодно малой нормой, так, чтобы его спектр стал чисто точечным.

6. Теория возмущений. Последнее утверждение предыдущего пункта может быть отнесено к теории возмущений, которая изучает изменение спектральных свойств при малых изменениях операторов.

Пусть дано семейство самосопряженных операторов $A(\varepsilon)$, зависящее от параметра ε, и пусть D — множество x, для которых существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A(\varepsilon)\,x = A_0 x.$$

(Предполагается, что $x \in D(A(\varepsilon))$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(x)$.) Если самосопряженный оператор A является замыканием оператора A_0, то для спектральных функций $E_\lambda(\varepsilon)$ и E_λ операторов $A(\varepsilon)$ и A справедливо соотношение

$$E_\lambda = \lim_{\varepsilon\to 0} E_\lambda(\varepsilon)$$

при любом λ, не принадлежащем точечному спектру оператора A. Предел понимается в сильном смысле. Равномерная сходимость $E_\lambda(\varepsilon)$ к E_λ (по норме операторов) в указанных условиях, вообще говоря, не имеет места. Ее может не быть даже, если потребовать, чтобы операторы $A(\varepsilon)$ были ограниченными и равномерно сходились к оператору A.

Если в области определения $D(A)$ самосопряженного оператора A ввести новую норму $\|x\|_1 = \|x\| + \|Ax\|$, то в этой норме $D(A)$ будет банаховым пространством H_1 (см. гл. I, § 5, п. 10). Если все операторы $A(\varepsilon)$ определены на $D(A)$ и сходятся к A равномерно относительно нормы $\|x\|_1$:

$$\|A(\varepsilon)\,x - Ax\| \leqslant C_\varepsilon \|x\|_1 \qquad (x \in D(A)),$$

где $C_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то спектральная функция $E_\lambda(\varepsilon)$ равномерно сходится к функции E_λ в любой точке λ, не принадлежащей спектру оператора A, т. е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|E_\lambda(\varepsilon) - E_\lambda\| = 0.$$

Если λ_0 — изолированная точка спектра, являющаяся собственным числом конечной кратности m, и Δ — интервал, отделяющий ее от остальной части спектра, то в предыдущих условиях при достаточно малом ε спектр оператора $A(\varepsilon)$ в интервале Δ состоит из m собственных значений (с учетом их кратности). Эти собственные числа $\lambda_k(\varepsilon)$ ($k = 1, 2, \ldots, m$) стремятся к точке λ_0 при $\varepsilon \to 0$. Следует, однако, иметь в виду, что, хотя $E_\Delta(\varepsilon)$ равномерно сходится к E_Δ, собственные элементы $e_k(\varepsilon)$, отвечающие собственным числам $\lambda_k(\varepsilon)$, могут не иметь предела при $\varepsilon \to 0$. Если λ_0 — простое собственное число, то собственный элемент $e(\varepsilon)$ оператора $A(\varepsilon)$ стремится к собственному элементу e оператора A.

Оператор $A(\varepsilon)$ называется *аналитической функцией* ε, если

$$A(\varepsilon) = A + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \ldots,$$

где операторы A_i и A действуют из H_1 в H, $D(A_i) = D(A) = H_1$, и ряд сходится по норме операторов. Тогда $E_\lambda(\varepsilon)$ также является в окрестности $\varepsilon = 0$ аналитической функцией ε при каждом λ, не принадлежащем спектру оператора A.

Для рассмотренного выше случая изолированного собственного числа λ_0 кратности m

$$\lambda_k(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_k^{(1)} + \varepsilon^2\lambda_k^{(2)} + \ldots$$

и

$$e_k(\varepsilon) = e_k + \varepsilon e_k^{(1)} + \varepsilon^2 e_k^{(2)} + \ldots$$

Пусть оператор A имеет полную систему собственных элементов $\{e_n\}$ с соответствующими собственными числами λ_n.

Если λ_n — изолированное простое собственное число оператора A, то можно получить формулы для определения коэффициентов разложения по степеням ε собственного числа $\lambda_n(\varepsilon)$ оператора $A(\varepsilon) = A + A_1\varepsilon$. Здесь приводятся лишь формулы первого и второго приближения:

$$\lambda_n(\varepsilon) = \lambda_n + \varepsilon\lambda_n^{(1)} + \varepsilon^2\lambda_n^{(2)} + \ldots,$$

где

$$\lambda_n^{(1)} = (A_1 e_n,\ e_n) \quad \text{и} \quad \lambda_n^{(2)} = \sum_m{}' \frac{|(A_1 e_n, e_m)|^2}{\lambda_n - \lambda_m}$$

(штрих при знаке суммы означает, что пропускается член с $m = n$).

Для собственного элемента $e_n(\varepsilon)$ справедливо разложение

$$e_n(\varepsilon)=e_n+\varepsilon e_n^{(1)}+\varepsilon^2 e_n^{(2)}+\ldots,$$

где $e_n^{(1)}=\sum_m{}' \frac{(A_1e_n,\,e_m)}{\lambda_n-\lambda_m}e_m$,

$$e_n^{(2)}=\sum_m{}'\sum_k{}' \frac{(A_1e_m,\,e_k)(A_1e_k,\,e_n)}{(\lambda_n-\lambda_k)(\lambda_n-\lambda_m)}e_m-$$

$$-\sum_m{}' \frac{(A_1e_n,\,e_n)(A_1e_m,\,e_n)}{(\lambda_n-\lambda_m)^2}e_m-\frac{1}{2}e_n\sum \frac{|(A_1e_n,\,e_m)|^2}{(\lambda_n-\lambda_m)^2}.$$

Эти формулы получили в физике название *формул теории возмущений.*

Если оператор A имеет участки непрерывного спектра, то имеются аналогичные формулы, где кроме сумм входят еще и интегралы.

В случае m-кратного собственного числа для получения коэффициентов при степенях ε приходится находить собственные функции и собственные числа m-мерных операторов.

Задачи теории возмущений являются частным случаем более общей задачи изучения поведения функции $f(A(\varepsilon))$ при изменении ε, где $f(\lambda)$ — заданная функция. Функция $E_\lambda(\varepsilon)$ есть как раз функция такого типа (см. п. 2). Для разложения по степеням ε таких функций естественно применить формулу Тейлора, предполагая функции $f(\lambda)$ и $A(\varepsilon)$ достаточно гладкими. Тогда

$$f(A(\varepsilon))=f(A)+\varepsilon\left.\frac{df(A(\varepsilon))}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}+\varepsilon^2\left.\frac{d^2f(A(\varepsilon))}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}+\ldots$$

Для производных функций от операторов по параметру имеются специальные формулы. Здесь приводится лишь формула для первой производной, которая справедлива в предположении, что оператор A имеет конечную абсолютную норму (см. гл. I, § 2, п. 1).

Если $x=\sum_k c_ke_k$, то

$$\left(\left.\frac{df(A(\varepsilon))}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right)x=\sum_k\sum_m c_k\frac{f(\lambda_m)-f(\lambda_k)}{\lambda_m-\lambda_k}\left(\left(\frac{dA}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}e_k,\ e_m\right)e_m,$$

где при $m=k$ предполагается, что $\frac{f(\lambda_m)-f(\lambda_k)}{\lambda_m-\lambda_k}=f'(\lambda_k)$.

7. Кратность спектра самосопряженного оператора. Спектр самосопряженного оператора A называется *простым*, если существует элемент $u \in H$ такой, что линейная замкнутая оболочка всех элементов вида $E_\Delta u$, где Δ — произвольный интервал вещественной оси, совпадает с H. При этом элемент u называется *порождающим*.

Для любых x и $y \in H$ справедливы формулы

$$x = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE_\lambda u, \qquad y = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\, dE_\lambda u$$

и

$$(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \overline{g(\lambda)}\, d\sigma(\lambda),$$

где

$$\sigma(\lambda) = (E_\lambda u, u),$$

а $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ — некоторые функции с интегрируемым квадратом модуля по мере $\sigma(\lambda)$. Функция $\sigma(\lambda)$ является неубывающей функцией ограниченной вариации на $(-\infty, \infty)$ и называется *спектральной функцией оператора* A.

Оказывается, что любой функции $f(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ с интегрируемым квадратом модуля по мере $\sigma(\lambda)$ соответствует некоторый элемент x, для которого

$$x = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE_\lambda u.$$

Таким образом, последняя формула устанавливает изометрическое соответствие между пространством H и пространством $L_{2,\sigma}$ всех функций $f(\lambda)$ на оси $(-\infty, \infty)$, для которых

$$\|f\|_{L_{2,\sigma}} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2\, d\sigma(\lambda) < \infty.$$

Для оператора A справедлива формула

$$Ax = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda f(\lambda)\, dE_\lambda u,$$

и, следовательно, при изометрическом соответствии он переходит в оператор Λ умножения на независимую переменную λ:

$$\Lambda f(\lambda)=\lambda f(\lambda),$$

определенный на всех функциях $f(\lambda)\in L_{2,\sigma}$, для которых $\lambda f(\lambda)\in L_{2,\sigma}$.

Совокупность элементов $u_1, u_2, \ldots, u_n$ называется *порождающим базисом* для оператора A, если линейная замкнутая оболочка множества всех элементов $E_\Delta u_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ совпадает с H. Спектр оператора A называется *n-кратным*, если минимальное число элементов в порождающем базисе оператора A равно n. Соответствующий базис называется *минимальным* порождающим базисом.

Многочисленные примеры самосопряженных операторов с конечнократным спектром дают обыкновенные дифференциальные операторы (см. § 5).

Если $u_1, \ldots, u_n$ — минимальный порождающий базис оператора A, то справедливы формулы

$$x=\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} f_k(\lambda)\,dE_\lambda u_k, \qquad y=\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} g_k(\lambda)\,dE_\lambda u_k$$

и

$$(x, y)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} f_i(\lambda)\overline{g_j(\lambda)}\,d\sigma_{ij}(\lambda),$$

где

$$\sigma_{ij}(\lambda)=(E_\lambda u_i, u_j).$$

Матрица $\sigma(\lambda)=(\sigma_{ij}(\lambda))$ эрмитова при каждом λ $(-\infty<\lambda<\infty)$, непрерывна слева, и разность $\sigma(\mu)-\sigma(\lambda)$ при $\mu>\lambda$ — неотрицательно определенная матрица. Пространство H изометрично гильбертову пространству $L_{2,\sigma}$ вектор-функций $f(\lambda)=\{f_1(\lambda), \ldots, f_m(\lambda)\}$ $(-\infty<\lambda<\infty)$, для которых

$$\|f\|_{L_2,\sigma}=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} f_i(\lambda)\overline{f_j(\lambda)}\,d\sigma_{ij}(\lambda)<\infty$$

и скалярное произведение введено по формуле

$$(f, g)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} f_i(\lambda)\overline{g_j(\lambda)}\,d\sigma_{ij}(\lambda),$$

причем интегралы следует понимать в особом смысле (см. [37]).

Оператор A при изометрическом соответствии переходит снова в оператор умножения всех компонент вектор-функций $f(\lambda)$ на независимую переменную λ:

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda f_k(\lambda)\, dE_\lambda u_k.$$

В общем случае для самосопряженного оператора, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве H, пространство можно представить в виде ортогональной суммы подпространств H_k ($k=1, 2, \ldots$) так, что каждое подпространство H_k инвариантно относительно оператора A и в нем оператор A имеет простой спектр.

В заключение следует отметить, что иногда удобно пользоваться несобственными порождающими элементами (см. [37]). В этом случае все формулы не изменяются, но функции $\sigma(\lambda)$ могут иметь неограниченную вариацию на $(-\infty, \infty)$.

8. Обобщенные собственные элементы. В § 2, п. 5 отмечалось, что если A — вполне непрерывный самосопряженный оператор, то его собственные элементы e_k ($k=1, 2, \ldots$) образуют базис в пространстве H, т. е. при любом $x \in H$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k.$$

Формула

$$x = \int_{-\infty}^{\infty} dE_\lambda x$$

является обобщением предыдущей на случай любого самосопряженного оператора. Более естественным обобщением была бы такая формула:

$$x = \int_{-\infty}^{\infty} e_\lambda\, d\varrho(\lambda),$$

где e_λ — элемент H, удовлетворяющий уравнению $Ae_\lambda = \lambda e_\lambda$ (собственный либо равный θ), а вес $d\varrho(\lambda)$ играет роль коэффициентов c_k в разложении в ряд. Однако самые простые не вполне непрерывные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, такие, как оператор умножения на x в $L^2(a, b)$ или оператор дифференцирования в $L^2(-\infty, \infty)$, не имеют собственных векторов в этих пространствах. В самом деле, если для некоторой функции $y(x) \in L^2(a, b)$ выполняется соотношение $xy(x) = \lambda y(x)$, то функция $y(x)$ должна равняться нулю при $x \neq \lambda$ и может быть отлична от нуля лишь при $x = \lambda$. Но в пространстве $L^2(a, b)$ нет ненулевого элемента, обладающего этим свойством. Все же оператор умножения иа x имеет собственные функции, именно дельта-функции $\delta(x-\lambda)$, которые являются обобщенными функциями (см. гл. VIII, § 1) и не принадлежат $L_2(a, b)$.

Приведенные примеры натолкнули на мысль искать разложения по собственным элементам, не принадлежащим пространству H. Трудность, состоящая в том, чтобы, располагая только понятиями, связанными с пространством H, строить элементы, ему не прииадлежащие, была преодолена следующим образом: в исходном гильбертовом пространстве H строится более узкое линейное топологическое, или банахово, или гильбертово пространство Φ. Топология в Φ вводится так, что функционалы (φ, h) $(h \in H)$ являются непрерывными на Φ, тогда пространство H оказывается погруженным в более широкое пространство Φ^*, в котором и ищутся собственные элементы оператора A. Собственные элементы оператора A, принадлежащие Φ^* и не принадлежащие H, называются *обобщенными собственными элементами* *).

Оказывается, что пространство Φ^* может быть построено по пространству H так, чтобы каждый самосопряженный в H оператор имел в Φ^* полную систему собственных элементов. В случае самосопряженного оператора A с простым спектром и порождающим элементом u разложение по обобщенным собственным элементам имеет при любом $\varphi \in \Phi$ вид

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\, e_\lambda\, d\sigma(\lambda),$$

*) Тройку пространств Φ, H и Φ^* $(\Phi \subset H \subset \Phi^*)$ называют *оснащенным гильбертовым пространством*.

где $\sigma(\lambda)=(E_\lambda u, u)$, а функция $g(\lambda)$ определяется из равенства

$$g(\lambda)=(\varphi, e_\lambda).$$

Последние формулы аналогичны формулам обращения в теории преобразования Фурье, где роль e_λ играют функции $e^{i\lambda x}$ и $\sigma(\lambda)=\lambda$ (см. § 2, п. 2). Справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|\varphi\|^2=(\varphi, \varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}|g(\lambda)|^2\, d\sigma_\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}|(\varphi, e_\lambda)|^2\, d\sigma_\lambda.$$

Для оператора с произвольным спектром формулы приобретают более сложный вид:

$$\varphi=\sum_{l=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi, e_\lambda^{(l)})\, e_\lambda^{(l)}\, d\sigma_\lambda^{(l)}$$

и

$$\|\varphi\|^2=\sum_{l=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|(\varphi, e_\lambda^{(l)})|^2\, d\sigma_\lambda^{(l)}.$$

Спектр оператора A называется *лебеговым*, если функции $\sigma(\lambda)$ эквивалентны λ, т. е. $\sigma(\lambda)$ и λ абсолютно непрерывны по отношению друг к другу. В этом случае во всех формулах можно заменить $d\sigma(\lambda)$ на $\varrho(\lambda)\, d\lambda$ с суммируемой на любом конечном интервале функцией $\varrho(\lambda)$.

§ 4. Симметрические операторы

1. Понятие симметрического оператора, индексы дефекта. Линейный оператор A с всюду плотной областью определения $D(A)$ называется *симметрическим*, если

$$(Ax, y)=(x, Ay)$$

при любых $x, y \in D(A)$.

Всякий самосопряженный оператор является симметрическим, но не наоборот. Область определения оператора A^*, сопряженного к симметрическому оператору A, может быть шире, чем область определения оператора A. На $D(A)$, очевидно, $Ax=A^*x$, поэтому оператор A^* является расширением оператора A.

Симметрический оператор всегда допускает замыкание, и его замыкание является снова симметрическим оператором. *Если симметрический оператор определен во всем пространстве, то он ограничен.* Если область значений симметрического оператора совпадает со всем пространством, то он самосопряжен.

Точка λ_0 называется *точкой регулярного типа* для оператора A, если

$$\| Ax - \lambda_0 x \| \geqslant k \| x \|, \qquad k > 0,$$

при всех $x \in D(A)$. Другими словами, это означает, что оператор $A - \lambda_0 I$ имеет ограниченный левый обратный. Если, кроме того, оператор A замкнут, то область значений $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$ оператора $A - \lambda_0 I$ будет замкнутым множеством. Если $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$ совпадает со всем пространством, то точка λ_0 будет регулярной точкой оператора A. Ортогональное дополнение $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ к подпространству $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$ называется *дефектным подпространством.* Размерность $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ дефектного подпространства $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ называется *индексом дефекта* оператора A в точке λ_0.

Если для симметрического оператора дано связное множество точек регулярного типа, то во всех точках этого множества индекс дефекта одинаков. Все невещественные числа являются для симметрического оператора точками регулярного типа, поэтому индекс дефекта n_+ во всех точках верхней полуплоскости будет одинаковым. Аналогично одинаков индекс дефекта n_- во всех точках нижней полуплоскости. Если на вещественной оси имеется хотя бы одна точка регулярного типа, то $n_+ = n_-$.

Замкнутый симметрический оператор будет самосопряженным в том и только в том случае, когда его индексы дефекта равны нулю. Пара чисел (n_+, n_-) (конечных или бесконечных) показывает степень отклонения симметрического оператора от самосопряженного.

Следует отметить, что дефектные подпространства $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ состоят из всех решений уравнения

$$A^* y = \bar{\lambda}_0 y.$$

Таким образом, индекс дефекта n_{λ_0} совпадает с числом линейно независимых решений этого уравнения.

2. Самосопряженные расширения симметрических операторов. Возникает вопрос о том, можно ли всякий симметрический оператор расширить до самосопряженного. Ответ следующий: *для того чтобы симметрический оператор можно было расширить до самосопряженного, необходимо и достаточно, чтобы индексы дефекта n_+ и n_- оператора были одинаковы.*

Как указывалось выше, это, например, будет иметь место, если на вещественной оси имеются точки регулярного типа.

Следует отметить, что здесь шла речь о расширении оператора в исходном гильбертовом пространстве H. Если индексы дефекта оператора A не одинаковы, то пространство H можно «достроить» до более широкого гильбертова пространства H_1 так, чтобы в нем индексы дефекта стали равными. В этом более широком пространстве будут существовать самосопряженные расширения оператора A.

Пусть A_0 — замкнутый симметрический оператор. Всякое симметрическое и, в частности, самосопряженное расширение оператора A_0 является сужением оператора A_0^*. Поэтому при построении такого расширения возникает вопрос не о том, к а к его доопределить на новых элементах, а только о том, какова его область определения, т. е. на к а к и х элементах из $D(A_0^*)$ его следует доопределить. Чтобы найти самосопряженные расширения оператора A_0, нужно в $D(A_0^*)$ найти такие линейные подмножества, содержащие $D(A)$, на которых оператор A_0^* порождает самосопряженный оператор.

Оказывается, что множество $D(A^*)$ имеет следующую структуру:

$$D(A^*) = D(A) \oplus \mathfrak{N}_\lambda \oplus \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}},$$

где λ — какое-либо невещественное число. Сумма, стоящая справа, является прямой, т. е. любой элемент $y \in D(A^*)$ представим единственным образом в виде

$$y = x + z_\lambda + z_{\bar{\lambda}},$$

где $x \in D(A)$, $z_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda$ и $z_{\bar{\lambda}} \in \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$.

Если индексы дефекта n_+ и n_- равны, то любое самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора A_0 может быть построено следующим образом: выбирается некоторый линейный оператор V, изометрически отображающий пространство

$\mathfrak{N}_\lambda$ на $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$. Тогда область определения $D(\tilde{A})$ оператора $\tilde{A}$ будет состоять из всех элементов вида

$$y = x + z_\lambda + Vz_\lambda,$$

где $x \in D(A)$ и $z_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda$.

Как уже отмечалось выше, значения оператора $\tilde{A}$ будут совпадать со значениями оператора A^*, т. е.

$$\tilde{A}y = A_0 x + \bar{\lambda} z_\lambda + \lambda V z_\lambda.$$

Если индексы дефекта не равны и, например, $n_+ < n_-$, то приведенная конструкция дает все максимальные симметрические расширения оператора A_0, т. е. такие симметрические расширения, которые не могут быть дальше расширены с сохранением симметричности.

Описанный здесь метод построения самосопряженных расширений принадлежит Дж. Нейману. Практически он является мало эффективным, так как требует нахождения решений уравнения $A^*y = \bar{\lambda}y$ и построения изометрического оператора V.

В следующем пункте рассматриваются другие методы построения самосопряженных расширеий.

3. Самосопряженные расширения полуограниченных операторов. Симметрический оператор A_0 называется *полуограниченным снизу*, если при любом $x \in D(A_0)$

$$(A_0 x, x) \geqslant a(x, x).$$

Все вещественные числа, не превосходящие числа a, будут точками регулярного типа, поэтому индексы дефекта оператора A_0 одинаковы.

При построении самосопряженных расширений оператора A_0 без ограничения общности можно считать его *положительно определенным*, т. е. таким, что $a > 0$. В противном случае можно перейти к оператору $A_0 + kI$ с достаточно большим положительным k. Если $\widetilde{A_0 + kI}$ будет самосопряженным расширением этого оператора, то $\widetilde{A_0 + kI} - kI$ будет самосопряженным расширением оператора A_0.

Пусть оператор A_0 положительно определен. В его области определения $D(A_0)$ можно ввести новое скалярное произведение по формуле

$$[x, y] = (A_0 x, y).$$

Пополнение $D(A_0)$ по норме, порождаемой этим скалярным произведением, будет гильбертовым пространством H_0. Оказывается, что присоединяемые при пополнении элементы естественным образом отождествляются с некоторыми элементами из H, и поэтому H_0 можно рассматривать как линейное подмножество пространства H. На пересечении этого подмножества H_0 с областью определения сопряженного оператора $D(A_0^*)$ оператор A_0^* является самосопряженным. Таким образом, получается самосопряженное расширение A_μ оператора A_0, являющееся сужением сопряженного оператора A_0^* на $D(A_\mu) = H_0 \cap D(A_0^*)$. Оператор A_μ называют *фридрихсовым* или *жестким расширением* оператора A_0. Оператор A_μ положительно определен и имеет ту же нижнюю грань, что и оператор A_0:

$$(A_\mu x, x) \geqslant a(x, x).$$

Жесткое расширение A_μ является наиболее простым. Для его построения ничего не нужно знать, кроме формы $(A_0 x, x)$, порождаемой оператором A_0. В связи с этим метод Фридрихса построения самосопряженных расширений стал одним из основных в теории уравнений с частными производными. Для более детального описания области определения жесткого расширения приходится более детально изучать характер сходимости, порождаемой нормой $\sqrt{(A_0 x, x)}$ на $D(A_0)$, и структуру области определения оператора A_0^* (см. § 5 и 6).

Множество H_0 является областью определения корня квадратного из оператора A_μ:

$$H_0 = D(A_\mu^{1/2}).$$

Для любого положительного самосопряженного расширения $\tilde{A}$ оператора A_0 область определения $D(\tilde{A}^{1/2})$ содержит множество H_0. Жесткое расширение обладает следующим экстремальным свойством: для любого самосопряженного положительно определенного расширения $\tilde{A}$ оператора A_0

$$(A_\mu^{-1} x, x) \leqslant (\tilde{A}^{-1} x, x).$$

Существенную роль играет оператор $B = \tilde{A}^{-1} - A_\mu^{-1}$, который в силу предыдущего является ограниченным положительным самосопряженным оператором. На $R(A_0)$ оператор B

равен нулю и, следовательно, его можно рассматривать как оператор, действующий в ортогональном дополнении U к $R(A_0)$:

$$H = R(A_0) \oplus U \text{ и } BU \subset U.$$

Подпространство U является дефектным подпространством $\mathfrak{N}_0$, состоит из всех решений уравнения $A^*u = 0$ в H и называется *нулевым подпространством* оператора A_0^*.

Справедливы следующие утверждения:

1) *Область определения сопряженного оператора A_0^* разлагается в прямую сумму*:

$$D(A_0^*) = D(A_0) \oplus A_\mu^{-1} U \oplus U.$$

2) *Область определения любого положительно определенного самосопряженного расширения A оператора A_0 разлагается в прямую сумму*

$$D(A) = D(A_0) \oplus (A_\mu^{-1} + B) U,$$

где B — некоторый ограниченный самосопряженный положительный оператор, действующий в подпространстве U.

3) *Для любого оператора B, обладающего описанными выше свойствами, сужение оператора A_0^* на множество $D(A_0) \oplus (A_\mu^{-1} + B) U$ является самосопряженным положительно определенным оператором.*

Таким образом, знание жесткого расширения A_μ позволяет свести описание любого положительно определенного самосопряженного расширения к описанию оператора B. Оператор B действует в более узком, чем H, пространстве U. В теории граничных задач для уравнений в частных производных подпространство U естественным образом взаимно однозначно отображается на некоторое пространство функций, заданных на границе области, и оператор B связывается с операторами граничных условий.

С помощью оператора B можно описать и структуру области определения корня квадратного из любого самосопряженного положительно определенного расширения A оператора A_0:

$$D(A^{1/2}) = D(A_\mu^{1/2}) \oplus R(B^{1/2}) = H_0 \oplus R(B^{1/2}).$$

Важность теории полуограниченных симметрических операторов иллюстрируется следующим примером. Пусть в n-мерной области G евклидова пространства с достаточно гладкой границей задано самосопряженное дифференциальное выражение порядка $2m$:

$$Lu = (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta u),$$

где

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

и аналогично определены β, $|\beta|$ и D^β. Коэффициенты $a_{\alpha\beta}$ предполагаются достаточно гладкими функциями $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$. Выражение L называется *эллиптическим*, если при любых вещественных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ справедливо неравенство

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta} \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n} \xi_1^{\beta_1} \ldots \xi_n^{\beta_n} \geqslant \lambda \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{2m},$$

где $\lambda > 0$ и не зависит от $x \in G$.

Оператор L_0, определенный равенством $L_0 u = Lu$ на множестве $D(L_0)$ всех *финитных* функций $u(x)$ (т. е. бесконечно дифференцируемых функций, равных нулю вблизи границы области G), является симметрическим и полуограниченным в пространстве $H = L_2(G)$. Более того, существуют константы $c > 0$ и k такие, что для оператора $A_0 = L_0 + kI$

$$(A_0 u, u) = \int_G (Lu \cdot u + ku^2)\, dx \geqslant c \left[\int_G \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2\, dx + \int_G |u|^2 dx \right].$$

Метрика, вводимая с помощью формы $(A_0 u, u)$ на $D(L_0)$, оказывается эквивалентной метрике пространства W_2^m Соболева. Пространство H_0 является подпространством $\overset{0}{W}{}_2^m$ пространства W_2^m. Решение уравнения

$$A_\mu u = f,$$

где A_μ — жесткое расширение оператора A_0 и $f \in L_2(G)$, называется *обобщенным решением* первой краевой задачи для уравнения $Lu + ku = f$.

Более подробно теория расширения иллюстрируется на примере эллиптического выражения 2-го порядка в § 6.

4. Диссипативные расширения. Линейный оператор B с всюду плотной областью определения $D(B)$ называется *диссипативным*, если при любом $x \in D(B)$

$$\operatorname{Re}(Bx, x) \leqslant 0.$$

Если при всех $x \in D(B)$ в предыдущем соотношении стоит знак равенства, то оператор называется *консервативным*.

Если A_0 — симметрический оператор, то для оператора $B_0 = iA_0$

$$\operatorname{Re}(B_0 x, x) = \operatorname{Re}(iA_0 x, x) = 0,$$

и, следовательно, оператор B_0 консервативный. В ряде задач возникает вопрос о построении диссипативных расширений оператора B_0, причем наиболее интересными являются *максимальные диссипативные расширения*, т. е. такие, которые не могут быть дальше расширены с сохранением диссипативности.

Область определения сопряженного оператора B_0^* может быть разложена в прямую сумму

$$D(B_0^*) = D(B_0) \oplus V_+ \oplus V_-,$$

где $V_\pm$ — совокупность всех решений уравнения

$$B_0^* v = \pm v.$$

Разложение является ортогональным в метрике

$$[x, y] = (A_0^* x, A_0^* y) + (x, y) \quad (x, y \in D(A_0^*) = D(B_0^*)).$$

Можно указать общий вид максимальных диссипативных расширений оператора B_0, являющихся сужениями оператора B_0^*. Для этого достаточно описать их область определения.

Для любого максимального диссипативного расширения $B \subset B_0^*$ оператора B_0 область определения имеет вид

$$D(B) = D(B_0) \oplus (I + C) V_-,$$

где C — *сжимающий* оператор (т. е. $\|C\| \leqslant 1$), действующий из V_- в V_+. Для любого такого оператора C оператор $Bx = B_0^* x$ на множестве указанного вида является максимальным диссипативным расширением оператора B_0.

§ 5. Обыкновенные дифференциальные операторы

1. Самосопряженные дифференциальные выражения. *Обыкновенным линейным дифференциальным выражением* n-го порядка называется выражение вида

$$l(y)=q_0(x)y^{(n)}+q_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+q_n(x)y$$

с вещественными коэффициентами $q_i(x)$ ($i=0, 1, \ldots, n$).

Сопряженным дифференциальным выражением называется выражение

$$l^*(y)=(-1)^n(q_0y)^{(n)}+(-1)^{n-1}(q_1y)^{(n-1)}+\ldots+q_ny.$$

Выражение $l(y)$ называется *самосопряженным*, если $l(y)\equiv l^*(y)$.

Всякое самосопряженное дифференциальное выражение с достаточным числом раз дифференцируемыми коэффициентами может быть представлено в виде

$$l(y)=(-1)^n(p_0y^{(n)})^{(n)}+(-1)^{n-1}(p_1y^{(n-1)})^{(n-1)}+\ldots+p_ny.$$

В дальнейшем предполагается, что коэффициенты $p_i(x)$ ($i=0, 1, \ldots, n$) определены на конечном или бесконечном интервале $[a, b]$ и имеют на $[a, b]$ непрерывные производные порядка $n-i$. Кроме того, предполагается, что функция $\frac{1}{p_0(x)}$ суммируема на каждом конечном отрезке $[\alpha, \beta]\subset(a,b)$.

Удобно называть *квазипроизводными* функции y, *соответствующими* $l(y)$, выражения, определяемые формулами:

$$y^{[0]}=y,$$

$$y^{[k]}=\frac{d^ky}{dx^k} \quad \text{при } k=1, 2, \ldots, n-1,$$

$$y^{[n]}=p_0\frac{d^ny}{dx^n},$$

$$y^{[n+k]}=p_k\frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}}-\frac{d}{dx}(y^{[n+k-1]}) \quad \text{при } k=1, 2, \ldots, n.$$

Из определения следует, что

$$l(y)=y^{[2n]}.$$

На каждом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ справедливо *тождество Лагранжа*

$$\int_\alpha^\beta l(y)\bar{z}\,dx - \int_\alpha^\beta y\overline{l(z)}\,dx = [y, z]\Big|_\alpha^\beta,$$

где

$$[y, z] = \sum_{k=1}^{n}\left\{y^{[k-1]}\bar{z}^{[2n-k]} - y^{[2n-k]}\bar{z}^{[k-1]}\right\}.$$

В гильбертовом пространстве $L_2[a, b]$ рассматривается линейное всюду плотное множество D_0', состоящее из финитных функций, т. е. бесконечно дифференцируемых функций, равных нулю вне некоторого отрезка $[\alpha, \beta]$ (своего для каждой функции), заключенного целиком в интервале $[a, b]$. На D_0' определяется оператор L_0' равенством $L_0'y = l(y)$. Из формулы Лагранжа следует, что оператор L_0' будет симметрическим оператором.

Замыкание A_0 оператора L_0' будет также симметрическим оператором. В теории дифференциальных операторов изучаются самосопряженные расширения оператора A_0.

2. Регулярный случай. Самосопряженное выражение $l(y)$ называется *регулярным*, если интервал (a, b) конечен и функция $\frac{1}{p_0(x)}$ суммируема на всем интервале (a, b).

Если $l(y)$ регулярно, то область определения $D(A_0)$ состоит из всех функций, имеющих на $[a, b]$ абсолютно непрерывные квазипроизводные до $(2n-1)$-го порядка включительно и квазипроизводную порядка $2n$, принадлежащую $L_2[a, b]$, и удовлетворяющих граничным условиям

$$y^{[k]}(a) = y^{[k]}(b) = 0 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \ldots, 2n-1.$$

Индексы дефекта оператора A_0 равны $2n$. Сопряженный оператор задается равенством $A_0^*y = l(y)$ и определен на множестве $D(A_0^*)$ всех функций, имеющих на $[a, b]$ абсолютно непрерывные квазипроизводные до $(2n-1)$-го порядка включительно и квазипроизводную $y^{[2n]} \in L_2[a, b]$.

Всякое самосопряженное расширение A оператора A_0 задается равенством $Ay = l(y)$ на функциях из $D(A_0^*)$, *удовлетворяющих системе граничных условий*

$$\Gamma_j y = \sum_{k=1}^{2n} [\alpha_{jk} y^{[k-1]}(a) + \beta_{jk} y^{[k-1]}(b)] = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 2n),$$

где

$$\sum_{\nu=1}^{n} [\alpha_{j\nu} \bar{\alpha}_{k,\ 2n-\nu+1} - \alpha_{j,\ 2n-\nu+1} \bar{\alpha}_{k\nu}] =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} [\beta_{j\nu} \bar{\beta}_{k,\ 2n-\nu+1} - \beta_{j,\ 2n-\nu+1} \bar{\beta}_{k\nu}] \quad (j, k = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Наоборот, *при любых* α_{jk} *и* β_{jk}, *удовлетворяющих последним условиям, на множестве всех функций из* $D(A_0^*)$, *удовлетворяющих системе граничных условий* $\{\Gamma_j y = 0\}$, *оператор* $Ay = l(y)$ *порождает самосопряженный оператор.*

Если $p_0(x) > 0$, то оператор A_0 полуограничен снизу. Жесткое расширение оператора A_0 соответствует системе граничных условий

$$y^{[k]}(a) = 0 \text{ и } y^{[k]}(b) = 0 \quad \text{при } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Резольвента любого самосопряженного расширения оператора A_0 есть интегральный оператор типа Гильберта — Шмидта (см. § 2, п. 5). Следовательно, резольвента любого самосопряженного расширения A является вполне непрерывным оператором, спектр оператора A является дискретным, оператор A имеет полную систему собственных элементов.

3. Сингулярный случай. Если интервал (a, b) бесконечен или функция $\frac{1}{p_0(x)}$ не суммируема на (a, b), то выражение $l(y)$ называется *сингулярным*. В этом случае картина получается значительно более сложной.

Область определения $D(A_0^*)$ оператора A_0^* получается такой же, как и в регулярном случае. Область определения самого оператора A_0 не всегда допускает описание с помощью граничных условий. Непосредственно из тождества Лагранжа следует, что $D(A_0)$ состоит из всех функций y из $D(A_0^*)$, для которых

$$[y, z]\Big|_a^b = 0$$

при всех $z \in D(A_0^*)$.

Индексы дефекта n_+ и n_- оператора A_0 всегда одинаковы (вследствие вещественности коэффициентов выражения $l(y)$) и могут равняться любому целому числу m, заключенному между 0 и $2n$: $0 \leqslant m \leqslant 2n$. Следует напомнить, что индекс дефекта равен числу m линейно независимых решений уравнения

$$l(y) = \lambda y$$

при невещественном λ, принадлежащих $L_2[a, b]$.

Описание всех самосопряженных расширений оператора уже не удается сделать с помощью системы граничных условий. Условия, выделяющие область определения самосопряженного расширения из множества $D(\overset{*}{A}_0)$, пишутся в неявной форме (см. [37]).

Резольвента всякого самосопряженного расширения является интегральным оператором с ядром Карлемана (см. § 3, п. 6).

Если индекс дефекта оператора A_0 равен $2n$, то ядро является ядром Гильберта—Шмидта. В этом случае спектр любого самосопряженного расширения дискретен. В общем случае спектр состоит из дискретной и непрерывной части. Непрерывная часть спектра у всех самосопряженных расширений одинакова.

Несколько больше можно сказать в случае, когда выражение $l(y)$ на одном из концов интервала (a, b) регулярно. Пусть a конечно и $\frac{1}{p_0(x)}$ суммируема на всяком интервале (a, c), где $a < c < b$. Тогда область определения оператора A_0 состоит из всех функций из $D(\overset{*}{A}_0)$, для которых

$$y^{[k]}(a) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, 2n-1,$$

и $[y, z]^b = 0$ при всех $z \in D(\overset{*}{A}_0)$.

Индекс дефекта может быть любым целым числом между n и $2n$: $n \leqslant m \leqslant 2n$.

Если индекс дефекта равен n, то второе условие $[y, z]^b = 0$ выполняется для всех $y, z \in D(\overset{*}{A}_0)$, поэтому область определения $D(\overset{*}{A}_0)$ описывается лишь первыми условиями $y^{[k]}(a) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n-1)$. В этом случае любое самосопряженное расширение также описывается с помощью граничных условий на регулярном конце: область определения расширения состоит из всех функций из $D(A_0^*)$, удовлетворяющих условиям

$$\Gamma_j y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\, y^{[k-1]}(a) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$\sum_{\nu=1}^{n} [\alpha_{j\nu}\, \overline{\alpha}_{k,\, 2n-\nu+1} - \alpha_{j,\, 2n-\nu+1}\, \overline{\alpha}_{k\nu}] = 0 \quad (j,\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Наоборот, написанная система граничных условий выделяет из $D(A_0^*)$ область определения самосопряженного расширения оператора A_0, если α_{jk} удовлетворяют последней системе равенств.

Если выражение $l(y)$ сингулярно на обоих концах (a, b), то интервал (a, b) можно разбить внутренней точкой c на два интервала: (a, c) и (c, b), в каждом из которых $l(y)$ будет регулярным в конце c. Если обозначить через A_0^+ и A_0^- операторы, порождаемые $l(y)$ на интервалах (c, b) и (a, c), и через m^+ и m^- индексы дефекта операторов A_0^+ и A_0^-, то для индекса дефекта оператора A_0 на всем интервале (a, b) справедлива важная формула

$$m = m^+ + m^- - 2n.$$

В частности, если индексы дефекта операторов A_0^+ и A_0^- равны n, то оператор A_0 на (a, b) будет самосопряженным. Наоборот, если A_0 на (a, b) самосопряжен, то, поскольку всегда $m^+ \geqslant n$ и $m^- \geqslant n$, операторы A_0^+ и A_0^- имеют индексы дефекта n.

4. Критерии самосопряженности оператора A_0 на $(-\infty, \infty)$. В этом пункте приводится ряд простых критериев, позволяющих по коэффициентам выражения $l(y)$ устанавливать самосопряженность оператора A_0, порождаемого $l(y)$ на всей оси $-\infty < x < \infty$. Как было указано выше, эти критерии одновременно являются критериями того, что на полуосях $[0, \infty)$ и $(-\infty, 0]$ соответствующие операторы A_0^+ и A_0^- имеют индексы дефекта, равные n.

Если коэффициенты выражения $l(y)$ постоянны:

$$p_0(x) = a_0 \neq 0,\ p_1(x) = a_1,\ \ldots,\ p_n(x) = a_n,$$

то это выражение принимает вид

$$l(y)=a_0\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}+a_1\frac{d^{2n-2}y}{dx^{2n-2}}+\ldots+a_ny.$$

Оператор A_0, порожденный на $(-\infty, \infty)$ выражением $l(y)$ с постоянными коэффициентами, самосопряжен.

Ряд критериев устанавливает, что оператор A_0 самосопряжен, если его коэффициенты в известном смысле близки к постоянным. Оператор A_0 на $(-\infty, \infty)$ самосопряжен в каждом из перечисляемых ниже случаев:

1) существуют пределы $\lim\limits_{x\to\infty} p_0=a_0\neq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} p_1=a_1, \ldots$ $\ldots, \lim\limits_{x\to\infty} p_n=a_n$;

2) функции $\frac{1}{p_0}$, p_1, $\ldots$, p_n отличаются от некоторых чисел $\frac{1}{a_0}$, a_1, $\ldots$, a_n на суммируемые на $(-\infty, \infty)$ функции;

3) функции $\left(\frac{1}{p_0}\right)'$, p_1, p_2, $\ldots$, p_n суммируемы на $(-\infty, \infty)$ и $\lim\limits_{x\to\infty} p_0(x)>0$.

Все эти критерии могут быть соответственно обобщены, если воспользоваться следующим свойством: при прибавлении к коэффициенту $p_n(x)$ ограниченной на $(-\infty, \infty)$ функции индекс дефекта оператора A_0 не изменяется. Отсюда, в частности, вытекает самосопряженность оператора A_0, порожденного на $(-\infty, \infty)$ выражением

$$l(y)=(-1)^n\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}+q(x)y,$$

где $q(x)$ — ограниченная на $(-\infty, \infty)$ функция.

Более сильные утверждения справедливы при $n=2$, т. е. для выражения

$$l(y)=-y''+q(x)y.$$

Оператор A_0, порожденный этим выражением на $(-\infty, \infty)$, будет самосопряженным, если функция $q(x)$ ограничена только снизу или, более общо, если при достаточно больших $|x|$

$$q(x)\geqslant -kx^2 \qquad (k>0).$$

Оператор A_0 также самосопряжен, если $q(x)\in L_2(-\infty, \infty)$.

Другие критерии самосопряженности и несамосопряженности оператора A_0, порожденного самосопряженным дифференциальным выражением $l(y)$, см. в [37].

5. Характер спектра самосопряженных расширений. Как указывалось, в сингулярном случае спектр самосопряженных расширений может быть и дискретным, и непрерывным. Если рассмотреть выражение $l(y)$ на $[0, \infty)$, то при выполнении условия 3) предыдущего пункта непрерывная часть спектра всякого самосопряженного расширения оператора A_0 на $[0, \infty)$ совпадает со всей положительной полуосью $\lambda \geqslant 0$. Точки дискретного спектра могут находиться как на отрицательной, так и на положительной части полуоси.

Если $p_0(x) > 0$ и выполнены условия 1) предыдущего пункта, причем $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ положительны, то в интервале $(-\infty, a_n)$ может находиться только дискретная часть спектра. Единственной точкой сгущения дискретного спектра на $(-\infty, a_n)$ может быть лишь точка $\lambda = a_n$.

Вопрос о характере спектра является одним из важнейших в теории дифференциальных операторов. Особое значение он имеет в задачах квантовой механики. Для дифференциальных операторов квантовой механики он изложен в гл. VII.

6. Разложение по собственным функциям. В регулярном случае для самосопряженного расширения A существует полная ортонормированная система собственных функций, по которой разлагается в ряд Фурье любая функция из $L_2(a, b)$. Если эта функция принадлежит области определения самосопряженного расширения, т. е. является достаточно гладкой и удовлетворяет соответствующим граничным условиям, то ее ряд Фурье сходится равномерно.

В сингулярном случае у самосопряженного расширения может появиться непрерывный спектр и вместо разложения в ряды появляются разложения в интегралы, которые также называются *разложениями по собственным функциям* дифференциального оператора $l(y)$.

Пусть $u_1(x, \lambda), u_2(x, \lambda), \ldots, u_{2n}(x, \lambda)$ — система решений уравнения $l(y) = \lambda y$, удовлетворяющих начальным условиям

$$u_j^{[k-1]}(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = k, \\ 0 & \text{при } j \neq k, \end{cases}$$

где x_0 — фиксированная точка из (a, b).

Для всякого самосопряженного расширения A оператора A_0, порожденного выражением $l(y)$, существует матричная функция

$$\sigma(\lambda)=(\sigma_{jk}(\lambda)) \qquad (j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n)$$

такая, что для любой функции $f(x)\in L_2(a,\ b)$ справедлива формула

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j,\ k=1}^{2n}\varphi_j(\lambda)\,u_k(x,\ \lambda)\,d\sigma_{jk}(\lambda),$$

причем интеграл сходится в среднем квадратичном. Вектор-функция $(\varphi_1(\lambda),\ \ldots,\ \varphi_{2n}(\lambda))$ принадлежит $L_{2,\sigma}$. Для нее справедливы формулы обращения

$$\varphi_j(\lambda)=\int_a^b f(x)\,u_j(x,\ \lambda)\,dx \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n),$$

где интеграл сходится в $L_{2,\sigma}$.

Имеет место аналог равенства Парсеваля:

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j,\ k=1}^{2n}\varphi_j(\lambda)\,\overline{\varphi_k(\lambda)}\,d\sigma_{jk}(\lambda).$$

Кратность спектра оператора A не превосходит $2n$. Ядро резольвенты оператора A задается формулой

$$K(x,\ s,\ \mu)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j,k=1}^{2n}\frac{u_k(x,\ \lambda)\,u_j(s,\ \lambda)}{\lambda-\mu}\,d\sigma_{jk}(\lambda),$$

где интеграл сходится в $L_2(a,\ b)$ по каждой из переменных x и s при фиксированной другой.

В случае, когда выражение $l(y)$ регулярно на одном из концов интервала $(a,\ b)$, например на конце a, и соответствующий оператор A_0 имеет индекс дефекта n, предыдущие разложения упрощаются. Всякое самосопряженное расширение в этом случае описывается с помощью системы из n граничных условий на конце a. В разложениях можно брать тогда не все решения $u(x,\ \lambda)$ уравнения $l(y)=\lambda y$, а только те, которые удовлетворяют на конце a соответствующим граничным условиям. Из них линейно независимыми будут n решений. Матрица распределения $\sigma(\lambda)$ будет порядка n. Так, для выражения второго порядка

$$l(y) = -\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + qy$$

на интервале (a, ∞) $(a > -\infty)$ разложения принимают вид

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, u(x, \lambda)\, d\sigma(\lambda)$$

и

$$\varphi(\lambda) = \int_{a}^{\infty} f(x)\, u(x, \lambda)\, dx,$$

где $\sigma(\lambda)$ — числовая неубывающая функция, а $u(x, \lambda)$ — решение уравнения $l(y) = \lambda y$, удовлетворяющее граничному условию

$$(pu' - \theta u)_{x=a} = 0.$$

Вещественный коэффициент θ соответствует данному самосопряженному расширению.

Функция $\sigma(\lambda)$ может быть найдена следующим образом: пусть $u_1(x, \lambda)$ и $u_2(x, \lambda)$ — два решения уравнения $l(y) = \lambda y$ такие, что

$$u_1(a, \lambda) = 1, \quad p(a)\, u_1'(a, \lambda) = 0,$$

$$u_2(a, \lambda) = 0, \quad p(a)\, u_2'(a, \lambda) = -1.$$

Так как индекс дефекта равен единице, то при каждом невещественном λ лишь одна комбинация вида $u_1(x, \lambda) + M(\lambda)\, u_2(x, \lambda)$ принадлежит $L_2(a, b)$. По функции $M(\lambda)$ находится функция $\sigma(\lambda)$:

$$\sigma(\lambda) = \lim_{\delta \to +0} \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\delta+\lambda} \operatorname{Im}\left[M(\lambda + i\varepsilon)\right] d\lambda.$$

7. Примеры.

1. Пусть дифференциальное выражение

$$l(y) = -y''$$

рассматривается на интервале $(0, \infty)$. Линейно независимыми решениями уравнения $-y''=iy$ будут

$$y_1 = e^{\frac{1-i}{\sqrt{2}}x} \quad \text{и} \quad y_2 = e^{-\frac{1-i}{\sqrt{2}}x}.$$

Из них только $y_2 \in L_2(0, \infty)$. Индекс дефекта соответствующего оператора A_0 равен 1. Самосопряженные расширения определяются граничными условиями

$$y'(0) = \theta y(0),$$

где θ — вещественное число. Решением уравнения $l(y)=\lambda y$, удовлетворяющим этому условию, будет

$$u(x, \lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\, x + \frac{\theta}{\sqrt{\lambda}} \sin\sqrt{\lambda}\, x.$$

Подсчет показывает, что

$$M(\mu) = \frac{1}{\theta - i\sqrt{\mu}}.$$

Если $\theta \geqslant 0$, то $\sigma(\lambda)=0$ при $\lambda<0$ и $\sigma'(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi(\lambda+\theta^2)}$. Следовательно, самосопряженные расширения при $\theta \geqslant 0$ имеют простой непрерывный лебегов спектр на $(0, \infty)$.

Разложения по собственным функциям имеют вид

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Phi(\lambda)\left\{\cos\sqrt{\lambda}\, x + \frac{\theta}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}x\right\}\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda+\theta^2}d\lambda,$$

где

$$\Phi(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\left\{\cos\sqrt{\lambda}\, x + \frac{\theta}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}\, x\right\}dx.$$

При $\theta = 0$ получаются формулы преобразования Фурье по косинусам.

2. *Дифференциальное выражение Бесселя* имеет вид

$$l(y) = -y'' + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}y \qquad (\nu \geqslant 0).$$

Если это выражение рассматривать на интервале $(0, \infty)$, то оно будет сингулярным на обоих концах. При $\nu \geqslant 1$ соответствующий оператор A_0 будет самосопряженным, при $0 \leqslant \nu < 1$ он будет иметь индекс дефекта $(1, 1)$. Так как общее решение уравнения $l(y) = \lambda y$ имеет вид

$$y = A\sqrt{x}\, J_\nu(x\sqrt{\lambda}) + B\sqrt{x}\, Y_\nu(x\sqrt{\lambda}),$$

то эти факты легко устанавливаются по асимптотическому поведению функций Бесселя при $z \to 0$ и $z \to \infty$.

На интервале $(0, 1)$ все самосопряженные расширения оператора A_0 имеют дискретный спектр. На интервале $(1, \infty)$ индекс дефекта A_0 равен 1, непрерывный спектр самосопряженных расширений заполняет положительную полуось. Если рассмотреть самосопряженное расширение, соответствующее граничному условию $y(1) = 0$, то разложение по собственным функциям имеет вид

$$f(x) = \int_0^\infty \sqrt{x}\, \frac{J_\nu(x\sqrt{\lambda})\, Y_\nu(\sqrt{\lambda}) - Y_\nu(x\sqrt{\lambda})\, J_\nu(\sqrt{\lambda})}{2\left(J_\nu^2(\sqrt{\lambda}) + Y_\nu^2(\sqrt{\lambda})\right)}\, \Phi(\lambda)\, d\lambda,$$

где

$$\Phi(\lambda) = \int_1^\infty \sqrt{x}\left\{J_\nu(x\sqrt{\lambda})\, Y_\nu(\sqrt{\lambda}) - Y_\nu(x\sqrt{\lambda})\, J_\nu(\sqrt{\lambda})\right\} f(x)\, dx.$$

Эти формулы называются *формулами обращения Вебера*.

На интервале $(0, \infty)$ при $\nu \geqslant 1$ разложения имеют вид

$$f(x) = \int_0^\infty \sqrt{x}\, J_\nu(x\sqrt{\lambda})\, \Phi(\lambda)\, d\lambda,$$

где

$$\Phi(\lambda) = \int_0^\infty \sqrt{x}\, J_\nu(x\sqrt{\lambda})\, f(x)\, dx.$$

Эти формулы задают *преобразования Ханкеля*.

8. Обратная задача Штурма — Лиувилля. *Обратными задачами* в спектральной теории дифференциальных операторов называются задачи о восстановлении дифференциального выражения данного порядка по тем или иным спектральным характеристикам самосопряженного оператора, порожденного этим выражением. Здесь рассматривается один вариант постановки обратной задачи.

Пусть для некоторого дифференциального выражения второго порядка

$$l(y) = -y'' + q(x)\,y$$

известна спектральная функция $\sigma(\lambda)$, соответствующая некоторому самосопряженному расширению A оператора A_0, порожденного выражением $l(y)$ на $(0, \infty)$.

Требуется найти коэффициент $q(x)$ в выражении $l(y)$ и вид граничного условия, соответствующего оператору A. Для этой задачи имеется несколько методов решения, один из которых здесь излагается.

Полагают

$$\tau(\lambda) = \begin{cases} \sigma(\lambda) - \dfrac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} & \text{при } \lambda > 0, \\ \sigma(\lambda) & \text{при } \lambda < 0 \end{cases}$$

и находят функции

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x \sin\sqrt{\lambda}\,y}{\lambda}\, d\tau(\lambda)$$

и

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\,\partial y}.$$

Интегральное уравнение

$$f(x, y) + \int_0^x f(y, s)\,K(x, s)\,ds + K(x, y) = 0$$

при каждом фиксированном x имеет единственное решение $K(x, y)$. Функция $q(x)$ определяется по формуле

$$q(x) = \frac{1}{2}\,\frac{dK(x, x)}{dx}.$$

Граничное условие, определяющее данное самосопряженное расширение, имеет вид

$$y'(0) - \theta y(0) = 0, \text{ где } \theta = K(0, 0).$$

Собственные функции $u(x, \lambda)$ уравнения $l(y)=\lambda y$, удовлетворяющие граничным условиям $u(0, \lambda)=1$, $u'(0, \lambda)=\theta$, можно найти по формуле

$$\varphi(x, \lambda)=\cos\sqrt{\lambda}\,x+\int_0^x K(x, t)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt.$$

Описанные здесь построения удается обосновать при условиях:

1) интеграл

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\sqrt{|\lambda|}\,x}\,d\sigma(\lambda)$$

существует при любом вещественном x,

2) функция

$$a(x)=\int_1^{\infty}\frac{\cos\sqrt{\lambda}\,x}{\lambda}\,d\tau(\lambda)$$

имеет непрерывные производные до 4-го порядка включительно.

Если функция $q(x)$ имеет непрерывную производную, то указанные условия необходимы для разрешимости обратной задачи.

§ 6. Эллиптический дифференциальный оператор второго порядка

1. Самосопряженное эллиптическое дифференциальное выражение. Пусть задано дифференциальное выражение второго порядка в самосопряженной форме:

$$lu=-\sum_{i,\,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right)+c(x)\,u(x),$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n)$ — точка n-мерного пространства. Предполагается, что коэффициенты $a_{ik}(x)$ и $c(x)$, а следовательно, и все выражение lu определены в некоторой области G и на ее границе. Матрица $(a_{ik}(x))$ симметрическая.

Выражение lu называется *эллиптическим*, если все собственные числа матриц $(a_{ik}(x))$ ограничены снизу положительной константой равномерно на $G+\Gamma$. Это определение согласуется с общим определением (см. § 4, п. 3).

В дальнейшем предполагается: область G ограничена, граница Γ достаточно гладкая; коэффициенты $a_{ik}(x)$ обладают частными производными первого порядка, непрерывными в замкнутой области $G+\Gamma$; функция $c(x)$ непрерывна в $G+\Gamma$ и $c(x)\geqslant 0$.

Для функций из класса $C^{(2)}(G+\Gamma)$ (см. гл. I, § 1, п. 5) интегрированием по частям получается *формула Грина*

$$\int_G luv\,dx=\int_G ulv\,dx-\int_\Gamma\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}v-u\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)ds.$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial\nu}$ — дифференцирование по направлению *конормали* в точке границы Γ:

$$\frac{\partial}{\partial\nu}=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}(x)\cos(n,\ x_k)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

где через n обозначен единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ.

2. Минимальный и максимальный операторы. L-гармонические функции. В гильбертовом пространстве $L_2(G)$ рассматривается множество D_0', состоящее из финитных в G функций. Равенством $L_0'u=lu$ на D_0' определяется линейный оператор, который в силу формулы Грина будет симметричным. Оператор L_0' является положительно определенным. Замыкание L_0 оператора L_0' будет также симметричным оператором, который называется *минимальным оператором*, порожденным выражением lu.

Область определения минимального оператора состоит из всех тех функций из пространства $W_2^2(G)$ (см. гл. I, § 2, п. 6), для которых $u|_\Gamma=0$ и $\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_\Gamma=0$.

Оператор $L=L_0^*$, сопряженный к L_0 в пространстве $L_2(G)$, называется *максимальным оператором*. Оператор L может быть получен как замыкание оператора $L'v$, определенного формулой $L'v=lv$ на множестве всех бесконечно дифференцируемых в $G+\Gamma$ функций $v(x)$.

Индекс дефекта оператора L_0 равен ∞. Дефектное подпространство U, ортогональное к области значений оператора L_0, состоит из всех решений уравнения $Lu=0$. Эти решения называются *L-гармоническими функциями*. Гладкая L-гармоническая функция u определяет на границе Γ некоторую функцию φ, значения которой совпадают с граничными значениями функции u:

$$\varphi(s)=u(s) \quad (s\in\Gamma).$$

Оператор γ, реализующий соответствие $u\longrightarrow\varphi$, может быть расширен по непрерывности на все пространство U. Таким образом, каждой L-гармонической функции взаимно однозначно ставится в соответствие ее «обобщенное» граничное значение γu. Для характеристики обширности дефектного пространства U можно указать, что совокупность граничных значений всех L-гармонических функций содержит в себе пространство $L_2(\Gamma)$ и даже $L_p(\Gamma)$ при $p\geqslant\frac{2(n-1)}{n}$, когда $n>2$, и при $p>1$, когда $n=2$. Полностью совокупность граничных значений может быть охарактеризована в терминах обобщенных функций.

В связи со сложной природой граничных значений L-гармонических функций области определения самосопряженных расширений оператора L_0, вообще говоря, не допускают описания с помощью граничных условий в классической форме. Эти области описаны с помощью граничных операторов, не допускающих в общем случае представления в рамках математического анализа. Здесь приводится лишь описание самосопряженных расширений, отвечающих трем основным краевым задачам математической физики.

3. Самосопряженные расширения, отвечающие основным краевым задачам. Жесткое расширение L_μ оператора L_0 определяется формулой $L_\mu u=lu$ на множестве $\overset{0}{W}{}_2^2(G)$ всех функций из $W_2^2(G)$, обращающихся в нуль на границе Γ.

Областью определения корня квадратного $L_\mu^{1/2}$ из жесткого расширения L_μ является множество $\overset{0}{W}{}_2^1(G)$, состоящее из всех функций из $W_2^1(G)$, обращающихся в нуль на Γ.

Таким образом, $D(L_\mu)$ и $D(L_\mu^{1/2})$ характеризуются одним и тем же граничным условием, но разными условиями гладкости.

Решения уравнения $L_\mu u = f$ называются решениями *первой однородной краевой задачи* для уравнения $lu = f$. Для этих решений справедливо важное неравенство

$$C_1 \|u\|_{W_2^2} \leqslant \|L_\mu\|_{L_2} \leqslant C_2 \|u\|_{W_2^2}.$$

Для области определения сопряженного к L_0 оператора L справедливо представление

$$D(L) = D(L_0) \oplus L_\mu^{-1} U \oplus U$$

(см. § 4, п. 3). Функции из $D(L_0)$ и $L_\mu^{-1} U$ принадлежат $W_2^2(G)$, следовательно, «негладкость» функций из области определения $D(L)$ может возникать только за счет L-гармонических слагаемых из U.

Оператор $L^0 u = lu$, определяемый на всех функциях из $W_2^2(G)$, удовлетворяющих граничному условию $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, определяет другое самосопряженное расширение оператора L_0. Если $c(x) \not\equiv 0$, то оператор L^0 является положительно определенным в $L_2(G)$; если $c(x) \equiv 0$, то он положительно определен на подпространстве $L_2(G)$, ортогональном к функции, тождественно равной 1.

Область определения корня квадратного из оператора L^0 совпадает с пространством $W_2^1(G)$. Таким образом, здесь при переходе от $D(L^0)$ к $D((L^0)^{1/2})$ граничное условие снимается.

Решения уравнения $L^0 u = f$ называются *решениями второй однородной краевой задачи* для уравнения $lu = f$.

Для этих решений также справедливо неравенство

$$C_1 \|u\|_{W_2^2(G)} \leqslant \|L^0 u\|_{L_2(G)} \leqslant C_2 \|u\|_{W_2^2(G)}.$$

Если в $W_2^2(G)$ рассмотреть совокупность всех функций, удовлетворяющих граничному условию $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(s) u \right|_{s \in \Gamma} = 0$, где функция $\sigma(s) \geqslant 0$ и является достаточно гладкой, то оператор L^σ, определенный равенством $L^\sigma u = lu$ на этой совокупности, будет самосопряженным и будет обладать теми же свойствами, что и L^0.

Если же функция $\sigma(s)$ только непрерывна или, более общо, измерима, то картина значительно усложняется. Область определения соответствующего самосопряженного расширения может уже содержать функции, не принадлежащие $W_2^2(G)$, для которых понятие производной по конормали может быть не определено не только в классическом смысле, но и в смысле Соболева. В связи с этим оператор дифференцирования по конормали расширяется. На функциях из $W_2^2(G)$ он определяется с помощью обычных обобщенных производных. Дополнительно он определяется на некотором множестве «не гладких» L-гармонических функций. Пусть $\varphi(s)$ — граничное значение L-гармонической функции $u(x)$ из $W_2^1(G)$:

$$\varphi=\gamma u, \quad u=\gamma^{-1}\varphi.$$

Тогда определен оператор

$$P'(\gamma u)=P'\varphi=\left.\frac{\partial(\gamma^{-1}\varphi)}{\partial\nu}\right|_\Gamma=\left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_\Gamma.$$

Оператор P', определенный на таких функциях φ, является симметрическим и положительным в $L_2(\Gamma)$. Его индекс дефекта равен нулю. Замыкание P оператора P' является положительным самосопряженным оператором. Каждой функции $\varphi\in D(P)$ соответствует L-гармоническая функция $\gamma^{-1}\varphi$. Совокупность $U_P(G)$ всех этих L-гармонических функций уже содержит все функции, на которых нужно доопределить оператор дифференцирования по конормали. Если $w=v+u$, где $v\in W_2^2(G)$, а $u\in U_P(G)$, то полагают

$$D_\nu w=\frac{\partial v}{\partial\nu}+P(\gamma u).$$

Оказывается, что оператор L, рассматриваемый на всех тех функциях из области определения оператора D_ν, для которых

$$D_\nu w(s)+\sigma(s)w(s)=0 \qquad (s\in\Gamma),$$

порождает самосопряженный оператор L^σ.

Решения уравнения $L^\sigma w=f$ называются *решениями третьей краевой задачи* для уравнения $lu=f$. Эти решения уже могут не принадлежать $W_2^2(G)$, но заведомо принадлежат $W_2^1(G)$.

Решения $w(x)$ обладают «сильной производной по конормали» в том смысле, что их можно аппроксимировать в $W_2^1(G)$ гладкими функциями так, чтобы

$$\left\|\frac{\partial w_n}{\partial\nu}-D_\nu w\right\|_{L_2(\Gamma)}\longrightarrow 0.$$

Приведенное построение теории третьей краевой задачи проходит не только при ограниченных измеримых функциях $\sigma(s)$, но и при $\sigma\in L_{2n-2}(\Gamma)$.

Область определения корня квадратного из оператора L^σ совпадает с пространством $W_2^1(G)$.

Описанное расширение оператора дифференцирования по конормали до оператора D_ν оправдывается также тем, что при этом сохраняет силу формула Грина

$$\int_G (Lw)\, v\, dx = \int_G \left[\sum_{i,k} a_{ik}(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} + cwv\right] dx - \int_\Gamma (D_\nu w)\, v\, ds,$$

справедливая при любой функции w из области определения оператора D_ν и $v \in W_2^1$.

Все рассмотренные самосопряженные расширения оператора L_0 имеют вполне непрерывные резольвенты, поэтому спектр каждого из расширений дискретен, собственные функции образуют ортогональный базис в $L_2(G)$. Резольвента будет оператором Гильберта—Шмидта, если число независимых переменных $n \leqslant 3$. При $n > 3$ лишь некоторая степень резольвенты будет оператором Гильберта—Шмидта.

§ 7. Гильбертова шкала пространств

1. Гильбертова шкала и ее свойства. Как уже отмечалось в предыдущих параграфах, для ряда задач рамки одного гильбертова пространства становятся узкими и для исследования различных сторон задачи приходится вводить различные гильбертовы пространства (см. § 3, п. 8; § 6). В связи с этим в последнее время было введено понятие гильбертовой шкалы пространств.

Пусть H_0 — гильбертово пространство и J — неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор в H_0 такой, что

$$(Jx,\ x) \geqslant (x,\ x) \qquad (x \in D(J)).$$

Через H_α при $\alpha \geqslant 0$ обозначается область определения степени J^α оператора J:

$$H_\alpha = D(J^\alpha)$$

(определение J^α см. в § 3, п. 4). Пространство H_α является гильбертовым по отношению к скалярному произведению

$$(x,\ y)_\alpha = (J^\alpha x,\ J^\alpha y).$$

При $\alpha<0$ по этой же формуле вводится скалярное произведение в пространстве H_0, и пространство, полученное пополнением H_0 по соответствующей норме, обозначается через H_α $(\alpha<0)$.

Полученное семейство гильбертовых пространств $\{H_\alpha\}$ $(-\infty<\alpha<\infty)$ называется *гильбертовой шкалой пространств*.

Гильбертова шкала пространств обладает свойствами:

1) *Если* $\alpha<\beta$, *то* $H_\beta\subset H_\alpha$, *пространство* H_β *всюду плотно в пространстве* H_α *и*

$$\|x\|_\alpha\leqslant\|x\|_\beta.$$

2) *Если* $\alpha<\beta<\gamma$, *то при* $x\in H_\gamma$ *справедливо неравенство*

$$\|x\|_\beta\leqslant\|x\|_\alpha^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}\,\|x\|_\gamma^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}.$$

3) *Пространства* H_α *и* $H_{-\alpha}$ *являются взаимно сопряженными по отношению к скалярному произведению в* H_0. *В частности,*

$$|(x,\ y)_0|\leqslant\|x\|_\alpha\|y\|_{-\alpha}\qquad(x\in H_\alpha,\ y\in H_{-\alpha}).$$

(Под функционалом $(x,\ y)_0$ понимается скалярное произведение в H_0, если $x,\ y\in H_0$, и его расширение по непрерывности, если $x\in H_\alpha$ и $y\in H_{-\alpha}$.)

Пусть H_0 и H_1 — два гильбертовых пространства со скалярными произведениями $(x,\ y)_0$ и $(x,\ y)_1$ и нормами $\|x\|_0$ и $\|x_1\|$ соответственно. Предполагается, что $H_1\subset H_0$, H_1 всюду плотно в H_0 и

$$\|x\|_0\leqslant\|x\|_1\qquad(x\in H_1).$$

Оказывается, что существует неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор J в H_0 такой, что областью определения его служит пространство H_1 и

$$\|x\|_1=\|Jx\|_0.$$

Оператор J называется *порождающим* для пары $(H_0,\ H_1)$. По оператору J можно построить гильбертову шкалу пространств, включающую пространства H_0 и H_1.

Оператор J, первоначально определенный на пространстве H_1 и отображающий его на пространство H_0, может быть расширен на пространства H_α. Таким образом, оператор J можно. считать расширенным до оператора $\tilde{J}$, определенного на всех пространствах $H_\alpha (-\infty < \alpha < \infty)$ и отображающего взаимно однозначно H_α на $H_{\alpha-1}$. Любой оператор $J^l (l > 0)$ порождает ту же гильбертову шкалу пространств и также может быть расширен до оператора, определенного на всей шкале и отображающего H_α на $H_{\alpha-l}$.

2. Пример гильбертовой шкалы. Пространства W_2^α. За пространство H_0 принимается пространство $L_2(R_n)$, где R_n — n-мерное пространство. Через $\widehat{u}(\xi)$ обозначается преобразование Фурье функции $u(x) \in L_2(R_n)$:

$$\widehat{u}(\xi) = \int e^{i(x, \xi)} u(x)\, dx.$$

Пусть J — оператор, ставящий в соответствие функции $u(x)$ функцию $v(x)$, преобразование Фурье которой имеет вид

$$\widehat{Ju}(\xi) = \widehat{v}(\xi) = \sqrt{1 + |\xi|^2}\, \widehat{u}(\xi).$$

Гильбертова шкала, построенная по оператору J, может быть описана так: пространства H_α при $\alpha \geqslant 0$ состоят из всех функций, для которых

$$\|u\|_\alpha^2 = \int (1 + |\xi|^2)^\alpha |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi < \infty.$$

При $\alpha < 0$ пространства H_α получаются пополнением $L_2(R_n)$ по написанной выше норме.

Полученная шкала пространств обозначается через $\{W_2^\alpha(R_n)\}$, она, по-видимому, является основной для многих задач анализа и теории уравнений в частных производных.

При α целых положительных пространства $W_2^\alpha(R_n)$ совпадают с пространствами Соболева (см. § 1, п. 2).

Возникает вопрос о том, существует ли гильбертова шкала пространств, содержащая пространства Соболева $W_2^l(G)$, определенные в области G n-мерного пространства. Ответ на этот вопрос неизвестен. Однако для каждого N можно построить гильбертову шкалу пространств $H_\alpha^{(N)}$, содержащую все пространства $W_2^l(G)$ при $0 \leqslant l \leqslant N$. Построение такой шкалы можно провести с помощью продолжения на все пространство R_n функций, заданных в области G, с сохранением гладкости.

Нормы в пространствах $H_\alpha^{(N)}$ будут при $0 \leqslant \alpha \leqslant N$ эквивалентны нормам в пространствах $W_2^\alpha(G)$: при $\alpha = m$, где m — целое:

$$\| u \|_{W_2^m} = \int_G \Big\{ |u|^2 + \sum_{|\beta|=1}^m |D^\beta u|^2 \Big\} dx;$$

при $\alpha = m + \lambda$, где m — целое и $0 < \lambda < 1$:

$$\|u\|_{W_2^{m+\lambda}} = \int_G \Big\{ |u|^2 + \sum_{|\beta|=1}^m |D^\beta u|^2 \Big\} dx + \\ + \sum_{|\beta|=m} \int_G \int_G \frac{|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\lambda}} dx\, dy.$$

При отрицательных индексах эффективного описания нормы нет, но она может быть определена как норма в сопряженном пространстве

$$\| u \|_{W_2^{-\alpha}} = \sup_{\| v \|_{W_2^\alpha} = 1} \Big| \int_G u(x) v(x)\, dx \Big| \qquad (\alpha > 0).$$

Таким образом, в любом наборе с ограниченными индексами α пространства $W_2^\alpha(G)$ обладают свойствами пространств гильбертовой шкалы. В частности:

1. При $\alpha < \beta$ пространство $W_2^\beta(G)$ содержится и всюду плотно в пространстве $W_2^\alpha(G)$ и

$$\| u \|_{W_2^\alpha} \leqslant C \| u \|_{W_2^\beta} \qquad (u \in W_2^\beta).$$

2. При $\alpha < \beta < \gamma$ имеет место неравенство

$$\| u \|_{W_2^\beta} \leqslant C \| u \|_{W_2^\alpha}^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} \| u \|_{W_2^\gamma}^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}} \qquad (u \in W_2^\gamma(G)).$$

Константы C в последних неравенствах зависят от вида области G и от максимального модуля индекса норм фигурирующих в них пространств. Последнее неравенство часто удобно применять в эквивалентной форме:

$$\| u \|_{W_2^\beta} \leqslant C \Big(\varepsilon^{-\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}} \| u \|_{W_2^\alpha} + \varepsilon^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} \| u \|_{W_2^\gamma} \Big),$$

где ε — любое положительное число.

3. Операторы в гильбертовой шкале. Для гильбертовых шкал справедлива следующая интерполяционная теорема: *пусть имеются две гильбертовы шкалы $\{H_\alpha\}$ и $\{F_\alpha\}$ и линейный оператор A, являющийся ограниченным оператором, действующим из пространства H_{α_0} в пространство F_{α_1} и из пространства H_{β_0} в пространство F_{β_1}. Тогда оператор A является ограниченным оператором, действующим из любого пространства $H_{\alpha_0(\mu)}$ в пространство $F_{\alpha_1(\mu)}$, где $\alpha_0(\mu)=(1-\mu)\alpha_0+\mu\beta_0$ и $\alpha_1(\mu)=(1-\mu)\alpha_1+\mu\beta_1$.*

В связи с указанным обстоятельством большинство операторов, возникающих в приложениях, естественно рассматривать не как операторы, действующие из одного пространства в другое, а как операторы, действующие из серии пространств одной шкалы в соответствующую серию пространств другой шкалы. Так, например, оператор γ, ставящий в соответствие L-гармонической функции ее граничное значение (см. § 6), является ограниченным оператором, осуществляющим взаимно однозначное отображение любого пространства шкалы $W_2^\alpha(G)$ с $\alpha\geqslant 0$ в пространство $W_2^{\alpha-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Самосопряженный оператор A, порожденный эллиптическим дифференциальным оператором порядка $l=2m$ и системой граничных условий (при определенных условиях на коэффициенты и область), порождает гомеоморфизм между подпространством W_2^l(гр.) пространства $W_2^2(G)$, состоящим из всех функций из W_2^2, удовлетворяющих граничным условиям, и пространством $L_2(G)$:

$$AW_2^l(\text{гр.})=L_2.$$

Обычно оказывается, что при этом сужение оператора A на $W_2^l(\text{гр.})\cap W_2^{l+s}(G)=W_2^{l+s}(\text{гр.})$ $(s\geqslant 0)$ устанавливает гомеоморфизм между пространствами W_2^{l+s}(гр.) и $W_2^s(G)$. Далее, оператор A допускает расширение на замыкание W_2^{l-s}(гр.) $(0\leqslant s\leqslant l)$ множества W_2^l(гр.) в метрике пространства $W_2^{l-s}(G)$ и тогда осуществляет гомеоморфизм между пространством W_2^{l-s}(гр.) и пространством W_2^{-s}(гр.), являющимся сопряженным к W_2^s(гр.). Наконец, оператор A может быть расширен на все пространства $W_2^{-s}(G)$ так, что он устанавливает гомеоморфизм между пространствами $W_2^{-s}(G)$ и W_2^{-l-s} (гр.).

Аналогичную систему гомеоморфизмов порождает и несамосопряженный эллиптический оператор при определенных граничных условиях.

4. Теоремы о следах. Пусть пространства $\{H_\alpha\}$ образуют гильбертову шкалу. Рассматриваются функции $x(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ со значениями в гильбертовом пространстве H_1 и имеющие непрерывную производную l-го порядка в пространстве H_0 (в смысле нормы пространства H_0 (см. гл. III, § 1, п. 1)). В множестве $\mathfrak{A}$ всех таких функций вводится норма

$$\|x\|_{\mathfrak{A}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \|x(t)\|_{H_1}^2 + \left\| \frac{d^l x}{dt^l} \right\|_{H_0}^2 \right\} dt.$$

Пространство $\mathfrak{A}$ пополняется по этой норме, и ставится вопрос о том, что можно сказать о значениях полученных функций и их производных порядка ниже l в любой точке вещественной оси, например в точке $t=0$.

Иначе этот вопрос можно еще поставить так: если последовательность функций $x_n(t) \in \mathfrak{A}$ является фундаментальной в норме этого пространства, то что можно сказать о сходимости значений этих функций и их производных в точке $t=0$?

Оказывается, что операторы, ставящие функции $x(t) \in \mathfrak{A}$ в соответствие элементы $x^k(0)$ $(k=0, 1, \ldots, l-1)$, являются непрерывными операторами из пространства $\mathfrak{A}$ в пространства H_{α_k}, где $\alpha_k = 1 - \frac{2k+1}{2l}$. Таким образом, можно говорить о значениях в точке самой функции и ее производных порядка ниже l для любой функции из пополнения $\overline{\mathfrak{A}}$ пространства $\mathfrak{A}$. Эти значения принадлежат соответственно пространствам H_{α_k}.

Обратно, если дан набор элементов $x_0, x_1, \ldots, x_{l-1}$ таких, что $x_k \in H_{\alpha_k}$, то можно построить функцию $x(t) \in \overline{\mathfrak{A}}$, для которой $x^k(0) = x_k$ $(k=0, 1, \ldots, l-1)$.

Утверждения приведенного типа важны при рассмотрении неоднородных краевых задач и в других вопросах, где требуется уметь продолжать функции с многообразий меньших размерностей на многообразия большей размерности с обеспечением определенных дифференциальных свойств. Здесь приводится соответствующий результат для шкалы пространств W_2^α (см. п. 2).

Пусть на границе Γ *области* G *задан набор функций* $u_0(s), u_1(s), \ldots, u_{l-1}(s)$. *Для того чтобы этот набор мог служить значениями на границе функции из* $W_2^l(G)$ *и ее нормальных производных, необходимо и достаточно, чтобы функции* $u_k(s)$ *принадлежали соответственно пространствам* $W_2^{l-\left(k+\frac{1}{2}\right)}(\Gamma)$.

Предложения указанного типа получили название *теорем о следах.*

ГЛАВА III

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Линейное уравнение с ограниченным оператором

1. Линейное уравнение 1-го порядка. Задача Коши. Линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + f(t),$$

где $f(t)$ — заданная функция со значениями в банаховом пространстве E, $x = x(t)$ — искомая функция со значениями в E, $A(t)$ при каждом фиксированном t — линейный оператор, действующий в пространстве E. Производная $\frac{dx}{dt}$ понимается как предел по норме пространства E разностного отношения $\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$.

В этом параграфе рассматривается тот случай, когда $A(t)$ является при каждом t ограниченным оператором. При этом условии свойства решений линейного уравнения аналогичны свойствам решений систем линейных дифференциальных уравнений, которые можно рассматривать как линейные уравнения в конечномерном банаховом пространстве.

Задачей Коши для рассматриваемого уравнения называется задача о нахождении решения уравнения при $0 \leqslant t < \infty$, удовлетворяющего заданному начальному условию

$$x(0) = x_0.$$

Линейное уравнение называется *однородным*, если $f(t) \equiv \theta$.

2. Однородное уравнение с постоянным оператором. Для однородного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

с постоянным ограниченным оператором A решение задачи Коши существует, единственно и может быть записано в виде

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

Оператор e^{At} определяется рядом

$$e^{At} = I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \ldots + \frac{t^nA^n}{n!} + \ldots,$$

который сходится по норме операторов. Оценка каждого члена ряда по норме дает неравенство

$$\| e^{At} \| \leqslant e^{t\|A\|}.$$

Операторы e^{At} при различных t $(-\infty < t < \infty)$ образуют однопараметрическую группу ограниченных операторов

$$e^{At}e^{A\tau} = e^{A(t+\tau)}.$$

Оценка нормы оператора e^{At}, приведенная выше, является грубой, так как она учитывает лишь норму оператора A и не учитывает расположение его спектра. Более точная оценка содержится в следующем утверждении: *если вещественные части всех точек спектра оператора A меньше числа σ, то*

$$\| e^{At} \| \leqslant Ne^{\sigma t}.$$

Обратно, из выполнения этого неравенства следует, что действительные части точек спектра оператора A не превосходят σ ($\operatorname{Re}\lambda \leqslant \sigma$).

В частности, для ограниченности всех решений уравнения на полуоси $0 \leqslant t < \infty$ необходимо, чтобы спектр оператора A лежал в замкнутой левой полуплоскости, и достаточно, чтобы он лежал в открытой левой полуплоскости.

Для ограниченности всех решений на всей оси $-\infty < t < \infty$ необходимо, чтобы спектр оператора A лежал на мнимой оси. Это условие не является достаточным, что можно проверить на примере конечномерного оператора с кратными элементарными делителями.

Пусть λ_0 — собственное число оператора A, которому соответствует собственный элемент e_0 и присоединенные элементы $e_1, e_2, \ldots, e_{m-1}$ (см. гл. I, § 5, п. 6). Тогда уравнение имеет частные решения вида

$$x_0(t) = e^{\lambda_0 t} e_0, \quad x_1(t) = e^{\lambda_0 t}(e_1 + te_0), \quad \ldots, \quad x_{m-1}(t) = \\ = e^{\lambda_0 t}\left(e_{m-1} + te_{m-2} + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e_0\right).$$

Если собственные и присоединенные элементы оператора A образуют базис в пространстве E (см. гл. I, § 6), то любое решение может быть представлено в виде ряда из частных решений указанного вида. В частности, если собственные векторы $\{e_n\}$ оператора A образуют базис в E, то общее решение уравнения имеет вид

$$x(t) = \sum c_n e^{\lambda_n t} e_n.$$

3. Случай гильбертова пространства. Пусть однородное уравнение с постоянным оператором рассматривается в гильбертовом пространстве H.

Если оператор A самосопряженный, то и оператор e^{tA} тоже самосопряженный и положительно определенный. Если $A = iB$, где B — самосопряженный оператор, то оператор e^{iBt} унитарный.

Для того чтобы все решения однородного уравнения в гильбертовом пространстве были ограниченными на всей оси, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был *подобен* оператору iB, где B — самосопряженный оператор, т. е.

$$A = Q(iB)\,Q^{-1},$$

где операторы Q и Q^{-1} ограничены.

Как и в общем случае, для ограниченности всех решений на полуоси $0 \leqslant t < \infty$ достаточно, чтобы спектр A лежал в открытой левой полуплоскости.

В гильбертовом пространстве можно дать критерий, обобщающий известную теорему Ляпунова: *для того чтобы спектр оператора A лежал в открытой левой полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой ограниченный самосопряженный положительно определенный оператор W, что оператор $WA + A^*W$ является отрицательно определенным.*

Иначе говоря, необходимо и достаточно существование положительно определенной формы (Wx, x), для которой

$$\frac{d(Wx, x)}{dt} \leqslant -\beta(x, x) \qquad (\beta > 0)$$

при любом решении $x(t)$ дифференциального уравнения.

4. Уравнение второго порядка. Для уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + Bx = 0$$

с ограниченным линейным оператором B в банаховом пространстве E задача Коши состоит в нахождении решения по начальным данным:

$$x(0) = x_0 \quad \text{и} \quad x'(0) = x_1.$$

Решение этой задачи дается формулой

$$x(t) = \cos t\sqrt{B}x_0 + \frac{\sin t\sqrt{B}}{\sqrt{B}}x_1,$$

где ограниченные операторы $\cos t\sqrt{B}$ и $\frac{\sin t\sqrt{B}}{\sqrt{B}}$ определены рядами

$$\cos t\sqrt{B} = I - \frac{t^2B}{2!} + \frac{t^4B^2}{4!} - \frac{t^6B^3}{6!} + \ldots,$$

$$\frac{\sin t\sqrt{B}}{\sqrt{B}} = tI - \frac{t^3B}{3!} + \frac{t^5B^2}{5!} + \frac{t^7B^3}{7!} + \ldots$$

Ряды сходятся по норме операторов.

Для того чтобы все решения уравнения второго порядка были ограниченными на всей оси $-\infty < t < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы оператор $\frac{\sin t\sqrt{B}}{\sqrt{B}}$ был равномерно по t ограниченным.

В гильбертовом пространстве для ограниченности всех решений на оси $-\infty < t < \infty$ необходимо и достаточно, чтобы оператор B был подобен положительно определенному оператору.

5. Однородное уравнение с переменным оператором. Пусть теперь в уравнении

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x$$

ограниченный в банаховом пространстве E оператор $A(t)$ непрерывно зависит от t. Решение задачи Коши для этого уравнения существует и единственно. Оно может быть получено методом последовательных приближений, примененным к интегральному уравнению

$$x(t)=x_0+\int_0^t A(\tau)\,x(\tau)\,d\tau.$$

Окончательно решеиие можно записать в виде

$$x(t)=U(t)\,x_0,$$

где оператор $U(t)$ является суммой сходящегося по норме операторов ряда

$$U(t)=I+\int_0^t A(\tau)\,d\tau+\int_0^t A(\tau)\int_0^\tau A(\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau+\ldots$$

Для ограниченного оператора $U(t)$ справедлива грубая оценка

$$\|U(t)\|\leqslant e^{t\max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|A(\tau)\|}.$$

Оператор $U(t)$ можно рассматривать как решение задачи Коши

$$\frac{dU}{dt}=A(t)\,U,\qquad U(0)=I$$

для дифференциального уравнения в пространстве ограниченных операторов, действующих в E.

При каждом t существует ограниченный обратный оператор $V(t)=U^{-1}(t)$. Этот оператор является решением задачи Коши для операторного дифференциального уравнения

$$\frac{dV}{dt}=-VA(t),\qquad V(0)=I,$$

которое называется сопряженным к предыдущему.

Если рассмотреть для исходного уравнения более общую задачу Коши, в которой начальное условие задается не в момент времени $t=0$, а в любой момент t_0:

$$x(t_0)=x_0,$$

то ее решение можно записать в виде

$$x(t)=U(t)\,U^{-1}(t_0)\,x_0=U(t,\ t_0)\,x_0.$$

Оператор $U(t,\ \tau)=U(t)\,U^{-1}(\tau)$ называется *разрешающим* оператором. Он обладает свойствами

$$U(t,\ s)\,U(s,\ \tau)=U(t,\ \tau)\quad\text{и}\quad U(t,\ t)=I.$$

В случае, когда $A(t)$ постоянен: $A(t)\equiv A$, разрешающий оператор $U(t,\ \tau)=e^{A(t-\tau)}$.

В дальнейшем в этом параграфе предполагается, что оператор $A(t)$ $(0\leqslant t<\infty)$ равномерно ограничен: $\|A(t)\|\leqslant M$. Тогда для решений исходного уравнения справедлива оценка

$$\|x(t)\|\leqslant e^{Mt}\|x(0)\|.$$

Показателем экспоненциального роста решения называется число

$$\sigma=\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\ln\|x(t)\|}{t}.$$

Всегда $\sigma\leqslant M$. Точную верхнюю грань чисел σ для всех решений уравнения называют *старшим показателем* σ_s. Для него справедлива формула

$$\sigma_s=\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\ln\|U(t)\|}{t}.$$

Существенно важной характеристикой уравнения является *особый показатель*, определяемый формулой

$$\sigma^*=\lim_{\tau,\ t-\tau\to\infty}\frac{\ln\|U(t,\tau)\|}{t-\tau}.$$

Для всякого решения при любом $\varepsilon>0$ справедливо неравенство

$$\|x(t)\|\leqslant N_\varepsilon e^{(\sigma^*+\varepsilon)(t-t_0)}\|x(t_0)\|\qquad(t\geqslant t_0),$$

где N_ε зависит только от ε.

Между старшим и особым показателями имеется соотношение $\sigma_s \leqslant \sigma^*$.

Если оператор $A(t)$ постоянен, то старший и особый показатели совпадают. В общем случае они не совпадают. Например, для обыкновенного уравнения $\frac{dx}{dt} = (\sin \ln t + \cos \ln t)\, x$ старший показатель равен 1, а особый равен $\sqrt{2}$.

Старший и особый показатели не изменяются при сдвиге аргумента, т. е. при переходе к уравнению $\frac{dx}{dt} = A(t+a)\, x$. Если в уравнении сделать замену искомой функции $x = Q(t)\, y$, где оператор $Q(t)$ равномерно ограничен на полуоси $0 \leqslant t < \infty$, имеет производную $\frac{dQ}{dt}$ и обратный оператор $Q^{-1}(t)$, непрерывные и равномерно ограниченные на этой полуоси, то функция y удовлетворяет уравнению

$$\frac{dy}{dt} = \left(Q^{-1}AQ - Q^{-1}\frac{dQ}{dt}\right) y,$$

у которого старший и особый показатели такие же, как и у исходного уравнения.

Уравнение называется *приводимым*, если описанной выше заменой оно сводится к уравнению с постоянным оператором. Для приводимого уравнения старший и особый показатели совпадают.

Величина особого показателя существенно зависит от поведения оператор-функции $A(t)$ на бесконечности. Если существует предел $A_\infty = \lim\limits_{t \to \infty} A(t)$ и спектр оператора A_∞ лежит в открытой левой полуплоскости, то особый показатель отрицателен.

Если операторы $A(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ образуют компактное множество в пространстве операторов, спектры всех предельных при $t \to \infty$ операторов A_∞ *) лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\nu$ $(\nu > 0)$ и существует производная $A'(t)$, стремящаяся к нулю при $t \to \infty$, то особый показатель также отрицателен. Последнее условие по $A'(t)$ можно ослабить,

---

*) Оператор A_∞ называется *предельным* для $A(t)$ при $t \to \infty$, если существует последовательность $t_i \to \infty$ такая, что $\lim\limits_{t_i \to \infty} \| A(t_i) - A_\infty \| = 0$.

потребовав, чтобы при достаточно больших t норма $\|A'(t)\|$ была меньше достаточно малой величины δ, согласованной с ν. Наконец, вместо существования производной можно потребовать, чтобы оператор-функция $A(t)$ при достаточно больших t удовлетворяла условию Липшица $\|A(t)-A(t_1)\|\leqslant\varepsilon|t-t_1|$ с достаточно малым коэффициентом ε.

В гильбертовом пространстве можно дать следующий критерий отрицательности особого показателя. *Если существует эрмитова форма* $(V(t)x, y)$ *такая, что*

$$0<\alpha_1(x, x)\leqslant(V(t)x, x)\leqslant\alpha_2(x, x)$$

и

$$\frac{d}{dt}(V(t)x(t), \quad x(t))\leqslant-\beta(x(t), x(t)), \quad \beta>0$$

для любого решения $x(t)$ *однородного уравнения, то особый показатель отрицателен.*

Наоборот, для всякого однородного уравнения с отрицательным особым показателем можно построить форму $(V(t)x, y)$ с указанными свойствами. Оператор $V(t)$ может быть получен, например, по формуле

$$V(t)=\int_t^\infty U^*(\tau, t)\,U(\tau, t)\,d\tau.$$

6. Уравнение с периодическим оператором. Пусть в уравнении

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x$$

оператор-функция $A(t)$ *периодична с периодом* ω:

$$A(t+\omega)=A(t) \qquad (0\leqslant t<\infty).$$

Разрешающий оператор $U(t, 0)=U(t)$ обладает свойством

$$U(t+\omega)=U(t)\,U(\omega).$$

Оператор $U(\omega)$ называется *оператором монодромии* уравнения с периодическим оператором.

Старший и особый показатели уравнения с периодическим оператором совпадают и равны логарифму спектрального радиуса оператора монодромии (см. гл. I, § 5 и 6), деленному на период:

$$\sigma_s = \sigma^* = \frac{\ln r_{U(\omega)}}{\omega}.$$

В частности, *чтобы особый показатель был отрицательным, необходимо и достаточно, чтобы спектр оператора монодромии лежал внутри единичного круга.*

Если спектр оператора монодромии не окружает нуля, то уравнение с периодическим оператором приводимо. Оно может быть сведено заменой $x = Q(t)y$ к уравнению с постоянными коэффициентами с помощью оператора

$$Q(t) = U(t)\, e^{-\frac{t}{\omega}\ln U(\omega)}.$$

Логарифм оператора $U(\omega)$ можно определить по формуле Коши

$$\ln U(\omega) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} (U(\omega) - \lambda I)^{-1} \ln\lambda\, d\lambda,$$

где контур Γ содержит внутри себя спектр оператора $U(\omega)$ и не содержит точку $\lambda = 0$, а $\ln\lambda$ — какая-либо однозначная ветвь логарифма.

В гильбертовом пространстве можно дать оценки для показателей σ экспоненциального роста решений через границы формы $\operatorname{Re}(A(t)x, x)$.

Если

$$\alpha_1(t)(x, x) \leqslant \operatorname{Re}(A(t)x, x) \leqslant \alpha_2(t)(x, x),$$

то

$$\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} \alpha_1(t)\, dt \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} \alpha_2(t)\, dt.$$

7. Неоднородное уравнение. Для неоднородного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$$

решение задачи Коши с начальным условием $x(0) = x_0$ можно записать с помощью разрешающего оператора $U(t, \tau)$ для соответствующего однородного уравнения в виде

$$x(t) = U(t, 0)x_0 + \int_0^t U(t, \tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Для неоднородного уравнения важным является вопрос об ограниченности его решений на $(0, \infty)$ при условии ограниченности $f(t)$:

$$\sup_{0 \leqslant t < \infty} \|f(t)\| < \infty.$$

Для того чтобы при каждой ограниченной функции $f(t)$ решение задачи Коши с нулевым начальным условием $x(0) = \theta$ для неоднородного уравнения было ограниченным на полуоси $(0, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы старший показатель однородного уравнения был отрицательным. При выполнении последнего условия все решения неоднородного уравнения будут ограниченными на $(0, \infty)$.

Если дополнительно известно, что оператор-функция $A(t)$ ограничена на полуоси, то необходимое условие можно усилить: для ограниченности на полуоси $(0, \infty)$ решения задачи Коши с условием $x(0) = \theta$ при любой ограниченной $f(t)$ необходимо (и, конечно, достаточно), чтобы особый показатель однородного уравнения был отрицательным. Существуют примеры неограниченных оператор-функций $A(t)$ таких, что при любой ограниченной $f(t)$ все решения неоднородного уравнения ограничены, а особый показатель положителен *).

Критерии ограниченности решений задачи Коши на полуоси $(-\infty, 0)$ получаются из приведенных критериев заменой знака старшего или особого показателя на противоположный. Поэтому вопрос об ограниченности на всей оси всех решений неоднородного уравнения при любой ограниченной $f(t)$ бессмыслен. Можно ставить вопрос о существовании хотя бы одного или только одного ограниченного решения при любой ограниченной $f(t)$. На последний вопрос в случае постоянного оператора $A(t) \equiv A$ имеется окончательный ответ: для того, чтобы каждой ограниченной $f(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ отвечало одно и только одно ограниченное на всей оси решение неоднородного уравнения с постоянным оператором A, необходимо и достаточно, чтобы спектр оператора A не пересекался с мнимой осью.

---

*) Для неограниченных $A(t)$ старший и особый показатели определяются так же, как для ограниченных.

Нелинейное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x),$$

где $f(t, x)$ при каждом t, вообще говоря, нелинейный оператор от x, можно рассматривать как линейное со свободным членом $f(t, x(t))$, тогда формула для решения задачи Коши дает уравнение

$$x(t) = U(t, 0)x_0 + \int_0^t U(t, \tau) f(\tau, x(\tau))\, d\tau.$$

Если известны оценки роста для разрешающего оператора $U(t, \tau)$, в частности, если известен особый показатель σ^*, то из полученного интегрального уравнения можно получать оценки решений нелинейного уравнения. Таким способом получаются аналоги теорем Ляпунова о равномерной и асимптотической устойчивости решений нелинейного уравнения.

§ 2. Уравнение с постоянным неограниченым оператором. Полугруппы

1. Задача Коши. В этом параграфе рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

с линейным оператором A, имеющим всюду плотную в банаховом пространстве E область определения $D(A)$.

Решением уравнения на отрезке $[0, T]$ называется функция $x(t)$, удовлетворяющая условиям: 1) значения функции $x(t)$ принадлежат области определения $D(A)$ оператора A при всех $t \in [0, T]$; 2) в каждой точке t отрезка $[0, T]$ существует сильная производная $x'(t)$ функции $x(t)$; 3) уравнение $x'(t) = Ax(t)$ удовлетворяется при всех $t \in [0, T]$.

Под *задачей Коши* на отрезке $[0, T]$ понимают задачу о нахождении решения уравнения на $[0, T]$, удовлетворяющего начальному условию

$$x(0) = x_0 \in D(A).$$

Если для линейного уравнения с ограниченным оператором вопросы существования и единственности решения задачи

Коши, непрерывной зависимости его от начальных данных всегда решались положительно и поэтому основное внимание уделялось поведению решений при $t \to \infty$, то для уравнения с неограниченным оператором перечисленные вопросы становятся центральными.

Говорят, что задача Коши *поставлена корректно* на отрезке $[0, T]$, если: 1) при любом $x_0 \in D(A)$ существует ее единственное решение и 2) это решение непрерывно зависит от начальных данных в том смысле, что из $x_{0,n} \to \theta$ $(x_{0,n} \in D(A))$ для соответствующих решений $x_n(t)$ следует $x_n(t) \to \theta$ при каждом $t \in [0, T]$.

В силу постоянства оператора A из корректности задачи Коши на каком-либо отрезке $[0, T]$ следует ее корректность на любом отрезке $[0, T_1]$ $(T_1 > 0)$, т. е. корректность на всей полуоси $[0, \infty)$.

Пусть $U(t)$ — оператор, ставящий в соответствие каждому элементу $x_0 \in D(A)$ значение решения $x(t)$ задачи Коши $x(0) = x_0$ в момент времени t. Если задача Коши корректно поставлена, то оператор $U(t)$ определен на $D(A)$, линеен и ограничен. Поэтому он может быть по непрерывности расширен до линейного ограниченного оператора, определенного на всем пространстве E, который также обозначается через $U(t)$.

Семейство ограниченных линейных операторов $U(t)$, зависящих от параметра t $(0 < t < \infty)$, называется *полугруппой*, если

$$U(t_1 + t_2) = U(t_1)\,U(t_2) \qquad (0 < t_1,\ t_2 < \infty).$$

Операторы $U(t)$, порожденные корректно поставленной задачей Коши, образуют полугруппу.

Таким образом, решение корректно поставленной задачи Коши можно записать в виде

$$x(t) = U(t)\,x_0 \qquad (x_0 \in D(A)),$$

где $U(t)$ — полугруппа операторов.

Если x_0 не принадлежит области определения оператора A, то функция $U(t)\,x_0$ может не быть дифференцируемой и ее значения могут не принадлежать области определения $D(A)$ оператора A. Функцию $U(t)\,x_0$ можно назвать *обобщенным решением уравнения* $x' = Ax$.

2. Равномерно корректная задача Коши. Корректно поставленная задача Коши называется *равномерно корректной*, если из $x_{0,n} \to \theta$ следует, что решения $x_n(t) \to \theta$ равномерно на каждом конечном промежутке $[0, T]$.

Если оператор A замкнут и его резольвента $R_A(\lambda)$ (см. гл. I, § 5, п. 6) существует хотя бы при одном λ, то из существования и единственности непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши при любом $x \in D(A)$ следует ее равномерная корректность.

Для равномерно корректной задачи Коши полугруппа $U(t)$ является *сильно непрерывной*, т. е. функция $U(t)x_0$ является непрерывной на $(0, \infty)$ при любом $x_0 \in E$.

Говорят, что полугруппа $U(t)$ принадлежит *классу* (C_0), если она сильно непрерывна и удовлетворяет условию

$$\lim_{t \to +0} U(t)x_0 = x_0$$

при любом $x_0 \in E$.

Полугруппа $U(t)$, порожденная равномерно корректной задачей Коши, принадлежит классу (C_0). Другими словами можно сказать, что в этом случае все обобщенные решения непрерывны на $[0, \infty)$.

Для любой сильно непрерывной полугруппы $U(t)$ существует предел

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\ln \| U(t) \|}{t} = \omega.$$

Если полугруппа принадлежит классу (C_0), то для нее справедлива оценка

$$\| U(t) \| \leqslant M e^{\omega t}.$$

Таким образом, для равномерно корректной задачи Коши порядки экспоненциального роста всех решений ограничены сверху.

Если $\omega = 0$, то полугруппа ограничена, $\| U(t) \| \leqslant M$, и задача Коши равномерно корректна на $[0, \infty)$. В этом случае в пространстве E можно ввести эквивалентную норму, например

$$\| x \|_1 = \sup_{0 \leqslant t < \infty} \| U(t) x \|,$$

в которой операторы $U(t)$ имеют норму, не превосходящую единицы:

$$\| U(t) \|_1 \leqslant 1.$$

Полугруппа в этом случае называется *сжимающей*.

Одним из простейших примеров равномерно корректной задачи Коши является задача Коши для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad v(0, x) = \varphi(x) \qquad (-\infty < x < \infty, \ 0 \leqslant t < \infty).$$

Пусть пространством E служит пространство $C(-\infty, \infty)$, состоящее из всех непрерывных ограниченных функций на оси Ox. Здесь оператором A является оператор второй производной по x, определенный на плотном в $C(-\infty, \infty)$ множестве $D(A)$, состоящем из всех дважды непрерывно дифференцируемых функций $v(x)$, для которых v и $v'' \in C(-\infty, \infty)$.

Задача Коши равномерно корректна, т. е. при любой функции $\varphi \in D(A)$ существует единственное решение $v(t, x)$ уравнения теплопроводности, обладающее тем свойством, что $\lim\limits_{t \to +0} v(t, x) = \varphi(x)$ равномерно по x. При этом, если $\varphi_n(x) \in D(A)$ равномерно сходятся к $\varphi(x) \in D(A)$, то решения $v_n(t, x) \to v(t, x)$ равномерно по x и t на всяком конечном промежутке $[0, T]$ изменения t.

Соответствующая полугруппа $U(t)$ ограниченных операторов задается *интегральной формулой Пуассона*

$$[U(t)\varphi](x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}} \varphi(s)\, ds \quad (t > 0)$$

и состоит из сжимающих операторов.

3. Производящий оператор и его резольвента. Для полугруппы $U(t)$ ставится вопрос о том, при каких элементах x_0 функция $U(t)x_0$ будет дифференцируемой. Дифференцируемость этой функции при любом t следует из ее дифференцируемости при $t = 0$.

На элементах x_0, для которых $U(t)x_0$ дифференцируема, в нуле определен линейный оператор

$$U'(0)x_0 = \lim_{h \to +0} \frac{U(h)x_0 - x_0}{h}.$$

Оператор $U'(0)$ называется *производящим оператором полугруппы* $U(t)$.

Если полугруппа принадлежит классу (C_0), то область определения D производящего оператора $U'(0)$ всюду плотна, он замкнут и коммутирует с полугруппой на своей области определения:

$$U'(0)\,U(t)\,x_0 = U(t)\,U'(0)\,x_0 \qquad (x_0 \in D).$$

Если задача Коши для уравнения $x' = Ax$ равномерно корректна, то оператор A допускает замыкание, представляющее собой производящий оператор соответствующей полугруппы $U(t)$:

$$\bar{A} = U'(0).$$

Для уравнения $x' = Ax$, где A — производящий оператор полугруппы класса (C_0), задача Коши является равномерно корректной.

Таким образом, если ограничиться уравнениями с замкнутыми операторами, то *класс уравнений, для которых задача Коши равномерно корректна, совпадает с классом уравнений, у которых оператор A является производящим для полугруппы класса* (C_0). Этим объясняется та роль, которую играет изучение полугрупп и их производящих операторов в теории дифференциальных уравнений.

Спектр производящего оператора полугруппы класса (C_0) всегда лежит в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \leqslant \omega$.

Класс производящих операторов может быть охарактеризован по поведению резольвенты $R_A(\lambda)$ операторов: *для того чтобы оператор A был производящим оператором полугруппы (C_0), необходимо и достаточно, чтобы существовали вещественное ω и положительное M такие, что для любого натурального k*

$$\| R_A^k(\lambda) \| \leqslant \frac{M}{(\lambda - \omega)^k} \quad \textit{при } \lambda > \omega \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Если в уравнении $x' = Ax$ оператор A замкнут, то приведенные условия являются необходимыми и достаточными для равномерной корректности задачи Коши.

При выполнении указанной серии условий для соответствующей полугруппы справедлива оценка

$$\| U(t) \| \leqslant M e^{\omega t}.$$

Проверка необходимых и достаточных условий затруднительна, так как в них фигурируют все степени резольвенты. Они будут заведомо выполнены, если

$$\| R_A(\lambda) \| \leqslant \frac{1}{\lambda - \omega} \qquad (\lambda > \omega).$$

Такое условие выполнено, например, для уравнения теплопроводности (см. пример п. 2).

При наличии последней оценки для полугруппы справедливо неравенство

$$\| U(t) \| \leqslant e^{\omega t}.$$

В частности, если $\omega = 0$, то $\| U(t) \| \leqslant 1$ и полугруппа сжимающая.

Следует подчеркнуть, что выполнение лишь условия

$$\| R_A(\lambda) \| \leqslant \frac{M}{\lambda - \omega} \ (\lambda > \omega)$$

с $M > 1$ не является достаточным для корректности задачи Коши.

Полугруппа $U(t)$ может быть построена по резольвенте $R_A(\lambda)$ по формуле

$$U(t)\, x = - \lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mu - i\nu}^{\mu + i\nu} e^{\lambda t} R_A(\lambda)\, x \, d\lambda,$$

справедливой при $x \in D(A)$, $t > 0$ и достаточно большом положительном μ. Интеграл сходится равномерно во всяком промежутке $0 < \varepsilon \leqslant t \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$. Предел интеграла при $t \to 0$ равен $x/2$.

Сама резольвента оператора A является преобразованием Лапласа (с противоположным знаком) от полугруппы:

$$R_A(\lambda)\, x = - \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)\, x \, dt.$$

Интеграл сходится, когда действительная часть λ достаточно велика.

Равномерно корректная задача Коши всегда является предельной для задач Коши с ограниченными операторами в следующем смысле: существует последовательность ограниченных операторов A_n такая, что решения задач $\frac{dx_n}{dt} = A_n x_n$, $x_n(0) = x_0 \in D(A)$, сходятся к решению задачи $\frac{dx}{dt} = Ax$, $x(0) = x_0$. При этом сходимость равномерна на каждом конечном интервале $[0, T]$. Операторы A_n могут быть построены по формуле $A_n = -nI - n^2 R_A(n) = -nAR_A(n)$. Полугруппа $U(t)$ является предельной для оператор-функций $e^{-nAR_A(n)t}$, причем сходимость равномерна на любом конечном интервале $[0, T]$.

4. Ослабленная задача Коши. В п. 1 от решения уравнения требовалось, чтобы оно удовлетворяло уравнению и при $t = 0$. Часто это требование приходится ослаблять.

Ослабленным решением уравнения $x' = Ax$ на отрезке $[0, T]$ называется функция $x(t)$, непрерывная на $[0, T]$, сильно дифференцируемая и удовлетворяющая уравнению на $(0, T]$.

Под *ослабленной задачей Коши* на $[0, T]$ понимают задачу о нахождении ослабленного решения, удовлетворяющего начальному условию $x(0) = x_0$. Здесь элемент x_0 не обязательно должен принадлежать области определения оператора A.

Если отвлечься от вопроса о существовании решения задачи Коши, то можно указать достаточно общие условия его единственности. Для единственности решений ослабленной задачи Коши достаточным является условие

$$\varlimsup_{\lambda \to \infty} \frac{\ln \| R_A(\lambda) \|}{\lambda} = h < T$$

(написанный предел всегда неотрицателен). При этом решение единственно на $[0, T-h]$ и может разветвляться при $t > T-h$. Если $h = 0$, то решение ослабленной задачи Коши на всей полуоси $(0, \infty)$ единственно. С другой стороны, для всякой функции $\varrho(\lambda) > 0$, удовлетворяющей условию $\frac{\ln \varrho(\lambda)}{\lambda} \to \infty$ $(\lambda \to \infty)$, существует дифференциальное уравнение $x' = Ax$ с оператором A, для которого $\| R_A(\lambda) \| < \varrho(\lambda)$, имеющее нетривиальное решение с начальным условием $x(0) = \theta$.

Если для резольвенты оператора A существуют вещественное ω, положительное M и $0<\beta\leqslant 1$ такие, что

$$\|R_A(\sigma+i\tau)\|\leqslant\frac{M}{\sigma-\omega+|\tau|^\beta}$$

в полуплоскости $\sigma>\omega$, то ослабленная задача Коши имеет единственное на $[0, \infty)$ решение при любом x_0 из области определения оператора A $(x_0\in D(A))$. Ослабленная задача Коши при этом будет корректной, но не будет равномерно корректной.

При выполнении последнего условия на резольвенту решение ослабленной задачи Коши задается формулой $x(t)=U(t)x_0$, где $U(t)$ — сильно непрерывная полугруппа.

Если $x_0\overline{\in} D(A)$, то обобщенное решение $U(t)x_0$ может быть разрывным в точке $t=0$. Однако оно всегда суммируется по Абелю к своему начальному значению:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)x_0\,dt=x_0.$$

Если для резольвенты оператора A справедлива приведенная выше оценка с показателем $\beta>\frac{1}{2}$, то для оператора $U(t)$ имеем

$$\int_0^T\|U(t)\|\,dt<\infty.$$

Ослабленная задача Коши в этом случае будет корректной в среднем: если $x_{0,n}\to\theta$, то для решений интегралы $\int_0^T\|x_n(t)\|\,dt$ стремятся к нулю. Производная от решения ослабленной задачи Коши может быть разрывной в точке $t=0$, но ее норма суммируема на любом конечном промежутке:

$$\int_0^T\|x'(t)\|\,dt<\infty.$$

5. Абстрактное параболическое уравнение. Аналитические полугруппы. *Абстрактным параболическим уравнением* называется уравнение $x'=Ax$, для которого является корректной ослабленная задача Коши с произвольным начальным условием $x_0 \in E$. Таким образом, для абстрактного параболического уравнения при любом $x_0 \in E$ существует единственное решение ослабленной задачи Коши и это решение непрерывно зависит от начальных данных.

Если оператор A замкнут и имеет резольвенту при достаточно больших положительных λ, то задача Коши для абстрактного параболического уравнения равномерно корректна и оператор A совпадает с производящим оператором полугруппы $U(t)$ класса C_0, с помощью которой задается решение $x(t) = U(t)x_0$.

Если задача Коши для уравнения $x' = Ax$ равномерно корректна, то для того, чтобы уравнение было абстрактным параболическим, достаточно, чтобы при некотором вещественном σ

$$\overline{\lim_{\tau \to \infty}} \ln (\tau \| R_A(\sigma + i\tau) \|) = 0.$$

Всякое обобщенное решение абстрактного параболического уравнения является ослабленным и, следовательно, дифференцируемым при $t > 0$. Из перестановочности производящего оператора и операторов полугруппы следует, что всякое обобщенное решение является бесконечно дифференцируемым. Операторы $A^k U(t)$ $(t > 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots)$ являются линейными операторами, ограниченными при каждом $t > 0$. Норма операторов $A^k U(t)$, вообще говоря, не ограничена при $t \to 0$.

Важный класс абстрактных параболических уравнений образуют уравнения, для которых все обобщенные решения являются аналитическими функциями t и могут быть аналитически продолжены в некоторый (фиксированный для данного уравнения) сектор комплексной плоскости, содержащий положительную вещественную полуось. Сама полугруппа $U(t)$ аналитически продолжается до некоторой оператор-функции $U(z)$, аналитической в секторе. В дальнейшем такие полугруппы называются *аналитическими*.

Для того чтобы полугруппа была аналитической, достаточно, чтобы в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ *для резольвенты* $R_\lambda(A)$ *оператора* A *выполнялась оценка*

$$\| R_A(\lambda) \| \leqslant \frac{M}{|\lambda - \omega|}.$$

Угол сектора аналитичности может быть определен следующим образом: из указанной оценки для резольвенты следует, что аналогичная оценка

$$\| R_A(\lambda) \| \leqslant \frac{M_1}{|\lambda - \omega|}$$

имеет место в некотором секторе $-\varphi < \arg(\lambda - \omega) < \varphi$ $\left(\varphi > \frac{\pi}{2}\right)$; тогда полугруппа $U(z)$ аналитична в секторе $-\psi < \arg z < \psi$, где

$$\psi = \varphi - \frac{\pi}{2}.$$

Если полугруппа принадлежит классу (C_0), то указанная оценка для резольвенты является и необходимой для ее аналитичности.

Для производных всех обобщенных решений уравнения $x' = Ax$ имеет место оценка

$$\| x'(t) \| \leqslant \frac{Ce^{\omega t}}{t} \| x_0 \| \qquad (0 < t < \infty).$$

Наоборот, если для полугруппы класса (C_0) справедлива оценка

$$\| AU(t) \| \leqslant \frac{Ce^{\omega t}}{t},$$

то эта полугруппа допускает аналитическое продолжение $U(z)$ в некоторый сектор, содержащий положительную полуось. Для норм операторов $A^k U(t)$ имеет место неравенство

$$\| A^k U(t) \| \leqslant \left(\frac{kC}{t}\right)^k e^{\omega t}.$$

Следует отметить, что из выполнения оценки для резольвенты при некотором ω следует, что она будет выполнена (возможно, с другой константой M) для любого ω, лежащего правее всех точек спектра A.

6. Обратная задача Коши. *Обратной задачей Коши* называется задача о нахождении решения на промежутке $[0, T]$ по заданному конечному значению:

$$x(T) = x_T \in D(A).$$

Заменой аргумента обратная задача Коши для уравнения $x' = Ax$ сводится к задаче Коши для уравнения $x' = -Ax$.

Если задача Коши для уравнения корректна, то обратная задача Коши, вообще говоря, не корректна: для некоторых x_T решение не будет существовать вообще, для других оно будет обрываться, не доходя до нуля; решения не будут непрерывно зависеть от начальных данных.

Если для уравнения прямая и обратная задачи Коши равномерно корректны, то операторы $U(t)$ определены и ограничены при всех $t\,(-\infty < t < \infty)$ и образуют группу, причем $U(-t) = U^{-1}(t)$.

Для того чтобы прямая и обратная задачи Коши с замкнутым оператором A были равномерно корректными, необходимо и достаточно, чтобы существовали постоянные M и $\omega > 0$ *такие, что*

$$\| R_A^n(\lambda) \| \leqslant \frac{M}{(|\lambda| - \omega)^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

при всех действительных λ *с* $|\lambda| > \omega$. *Спектр оператора A при этом лежит внутри полосы* $|\lambda| < \omega$.

Можно отвлечься от вопроса о существовании решения обратной задачи Коши и рассмотреть только вопрос о единственности решения и его непрерывной зависимости от конечных значений. Обратная задача Коши называется *корректной на* $[0, T]$ *в классе ограниченных решений*, если для всяких положительных M, ε и $t_0 \in (0, T)$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, M, t_0)$, что для любого ослабленного решения на $[0, T]$, удовлетворяющего условиям $\| x(t) \| \leqslant M$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ и $\| x(T) \| \leqslant \varepsilon$, выполнено неравенство $\| x(t_0) \| \leqslant \delta$.

Если все обобщенные решения уравнения $x' = Ax$ аналитичны в некотором секторе, то обратная задача Коши корректна в классе ограниченных решений на любом отрезке $[0, T]$. Этот факт вытекает из неравенства

$$\| x(t_0) \| \leqslant M \| x(0) \|^{1-\omega(t_0)} \| x(T) \|^{\omega(t_0)},$$

где непрерывная функция $\omega(t)$, $0 \leqslant \omega(t) \leqslant 1$, не зависит от выбора обобщенного решения.

7. Уравнения в гильбертовом пространстве. Простейшим примером абстрактного параболического уравнения является дифференциальное уравнение $x' = -Bx$ в гильбертовом пространстве H с неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором B.

Задача Коши для этого уравнения равномерно корректна, и соответствующая ей полугруппа $U(t)$ может быть записана в виде

$$U(t)=e^{-Bt},$$

где функция e^{-Bt} определяется с помощью спектрального разложения оператора A (см. гл. II, § 3, п. 4):

$$e^{-Bt}=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dE_\lambda.$$

Полугруппа $U(t)$ будет сжимающей, $\|U(t)\|\leqslant 1$.

Все обобщенные решения $x(t)=e^{-Bt}x_0$ $(x_0\in H)$ являются решениями ослабленной задачи Коши и допускают аналитическое продолжение в правую полуплоскость $\operatorname{Re} z>0$.

Можно изучить более детально поведение ослабленных решений при $t\to 0$. Произвольная (не целая) степень оператора B определяется с помощью спектрального разложения

$$B^\alpha=\int_0^\infty \lambda^\alpha\,dE_\lambda.$$

Если $x(0)\in D(B^\alpha)$, $\alpha>0$, то для решения ослабленной задачи Коши справедливо неравенство

$$\|x'(t)\|\leqslant\frac{C}{t^{1-\alpha}}\|B^\alpha x(0)\|.$$

В случае $\alpha=\frac{1}{2}$ решения допускают более точную характеристику: для того чтобы производная $x'(t)$ решения $x(t)$ имела на $[0, T]$ интегрируемую с квадратом норму

$$\int_0^T\|x'(t)\|^2\,dt<\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы $x(0)\in D(B^{1/2})$.

Следует еще отметить полезное неравенство

$$\|x(t)\|\leqslant\|x(0)\|^{1-\frac{t}{T}}\|x(T)\|^{\frac{t}{T}},$$

справедливое для любого обобщенного решения.

Линейный оператор C называется ***оператором дробного порядка*** относительно самосопряженного положительно определенного оператора B, если он определен на $D(B)$ и при некотором $\alpha \in (0, 1)$ оператор $CB^{-\alpha}$ ограничен на $D(B)$. Точная нижняя грань γ чисел α называется ***порядком*** оператора C относительно B.

Для того чтобы оператор C был оператором дробного порядка γ относительно оператора B, необходимо, а если C допускает замыкание, то и достаточно, чтобы при $x \in D(B)$, $\alpha > \gamma$ и достаточно малых δ выполнялось неравенство

$$\|Cx\| \leqslant K_\alpha \left(\delta^{1-\alpha} \|Bx\| + \frac{1}{\delta^\alpha} \|x\|\right),$$

где K_α не зависит от x и δ.

Если оператор C является оператором дробного порядка относительно самосопряженного положительно определенного оператора B, то уравнение $x' = -(B+C)x$ является абстрактным параболическим. Обобщенные решения будут аналитическими в некотором секторе, содержащем положительную полуось. Поведение решений при $t \to 0$ будет таким же, как и для уравнения $x' = -Bx$.

В гильбертовом пространстве могут быть полностью описаны производящие операторы ряда важных классов полугрупп. При этом описание делается в терминах, связанных с самим оператором, а не с его резольвентой.

1) ***Для того чтобы оператор A порождал сильно непрерывную сжимающую полугруппу операторов, необходимо и достаточно, чтобы он был максимальным диссипативным оператором с всюду плотной областью определения*** (см. гл. II, § 4, п. 4).

Иначе этот критерий еще можно сформулировать так: ***для того чтобы замкнутый оператор с всюду плотной областью определения был производящим оператором сильно непрерывной сжимающей полугруппы операторов, необходимо и достаточно выполнения условий***

$$\operatorname{Re}(Ax, x) \leqslant 0 \quad (x \in D(A)) \quad \textit{и} \quad \operatorname{Re}(A^*x, x) \leqslant 0 \quad (x \in D(A^*)).$$

2) ***Если операторы A и A^* имеют одинаковую всюду плотную область определения и оператор $\operatorname{Re} A = \frac{A+A^*}{2}$ ограничен, то оператор A является производящим опера-***

тором полугруппы $U(t)$ *класса* (C_0), *для которой справедлива оценка* $\|U(t)\| \leqslant e^{\omega t}$, *где* ω — *верхняя грань оператора* $\operatorname{Re} A$.

3) *Для того чтобы оператор* A *являлся производящим оператором сильно непрерывной полугруппы изометрических преобразований* ($\|U(t)\| = 1$), *необходимо и достаточно, чтобы он был максимальным диссипативным консервативным оператором с плотной областью определения. В этом случае* $A = iB$, *где* B — *максимальный симметрический оператор.*

4) *Для того чтобы оператор* A *был производящим оператором сильно непрерывной группы унитарных операторов, необходимо и достаточно, чтобы* $A = iB$, *где* B — *самосопряженный оператор. Группа операторов* $U(t)$ *может быть представлена с помощью спектрального разложения оператора* B *в виде*

$$U(t) = e^{iBt} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, dE_\lambda.$$

Прямая и обратная задачи Коши равномерно корректны на всей оси. Обобщенные решения $U(t)x_0$ являются дифференцируемыми лишь тогда, когда $x_0 \in D(A)$.

5) *Если для максимального диссипативного оператора выполнено условие*

$$|\operatorname{Im}(Ax, x)| \leqslant \beta\, |\operatorname{Re}(Ax, x)|,$$

то он является производящим оператором полугруппы, допускающей аналитическое продолжение в сектор $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\beta$.

Для резольвенты оператора справедлива оценка

$$\|R_A(\lambda)\| \leqslant \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|}$$

в секторе $|\arg\lambda| \leqslant \pi - \operatorname{arctg}\beta - \varepsilon$ *при любом* $\varepsilon > 0$.

Уравнение $x' = Ax$ является абстрактным параболическим уравнением, свойства его решений аналогичны свойствам решений уравнения $x' = -Bx$ с самосопряженным положительно определенным оператором B.

В последнее время многие из перечисленных критериев того, что оператор является производящим для полугрупп того или иного класса, перенесены на некоторые классы банаховых пространств.

8. Примеры корректных задач для уравнений в частных производных.

1. Задача Коши для уравнения диффузии. Пусть $b(x)$ — непрерывная ограниченная функция на всей оси $-\infty < x < \infty$. Рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(0, x) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < \infty, \ t > 0).$$

Область определения оператора $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ описана в примере п. 2. Такой же предполагается область определения оператора $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial}{\partial x}$. Задача Коши в пространстве $C(-\infty, \infty)$ является равномерно корректной.

2. Краевые задачи для сильно параболической системы уравнений. Пусть G — ограниченная область n-мерного пространства с достаточно гладкой границей Γ, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — точка области G, $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — N-мерная матрица, каждый элемент которой $L_{ij}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ является линейным дифференциальным оператором порядка $2m$ вида

$$L_{ij}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_{ij}^{(\alpha)}(x) D^\alpha \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, N),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $(\alpha_i \geqslant 0)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$. Коэффициенты $a_{ij}^{(\alpha)}(x)$ предполагаются действительными и достаточно гладкими. Матрица $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ предполагается *сильно эллиптической*, т. е.

$$(-1)^m \sum_{i, j=1}^{N} \sum_{|\alpha| = 2m} a_{ij}^{(\alpha)}(x)\, \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}\, \eta_i \eta_j > 0$$

при любых $x \in G$ и вещественных ξ_k и η_l с $\sum \xi_k^2 \neq 0$ и $\sum \eta_l^2 \neq 0$.

Для системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u \quad (x \in G,\ t > 0)$$

ставится первая краевая задача о нахождении решения $u(t, x) = (u_1(t, x), \ldots, u_N(t, x))$, удовлетворяющего начальному условию

$$u(0, x) = \varphi(x)$$

и граничным условиям

$$u \Big|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = \ldots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial n^{m-1}}\Big|_\Gamma = 0,$$

где n — направление нормали к границе Γ.

Сильно эллиптическое выражение $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ порождает линейный оператор в пространстве $\overline{L}_2(G)$ вектор-функций $u(x)$ с суммируемым квадратом модуля, определенный на гладких функциях, удовлетворяющих граничным условиям. Этот оператор допускает замыкание L, обладающее свойствами

$$\operatorname{Re}(Lu,\ u) \geqslant q(u, u) \quad (u \in D(L))$$

и

$$\operatorname{Re}(L^*u,\ u) \geqslant q(u, u) \quad (u \in D(L^*)).$$

Таким образом, оператор $qI - L$ будет максимальным диссипативным. Отсюда следует равномерная корректность описанной первой краевой задачи для уравнения $u'_t = -Lu$ в пространстве $\overline{L}_2(G)$. Для соответствующей полугруппы справедлива оценка $\| U(t) \| \leqslant e^{qt}$.

Аналогичную задачу можно рассмотреть в пространстве $\overline{L}_p(G)$ функций, для которых

$$\| u \|_{L_p} = \left\{\int | u(x) |^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad (p > 1).$$

Оказывается, что при любом $p > 1$ для резольвенты оператора $-L$, порожденного сильно эллиптической матрицей, справедлива оценка

$$\| (L + \lambda I)^{-1} \| \leqslant \frac{C}{| \lambda + q |}$$

в некотором секторе $| \arg \lambda | < \varphi \ \left(\varphi > \frac{\pi}{2}\right)$. Таким образом, полугруппа, порождаемая для сильно параболической системы первой краевой задачей в $\overline{L}_p(G)$, является аналитической. Решение задачи существует при любой начальной функции $\varphi(x) \in \overline{L}_p(G)$ и является аналитической функцией от t. Начальное условие удовлетворяется в том смысле, что

$$\| u(t, x) - \varphi(x) \|_{\overline{L}_p} \to 0 \qquad \text{при } t \to 0.$$

Для всех решений справедлива оценка производных

$$\| u'_t \|_{\overline{L}_p} \leqslant \frac{C}{t} \| \varphi \|_{\overline{L}_p},$$

где C не зависит от φ.

Для более простого случая одного уравнения со скалярной функцией $u(t, x)$ понятие сильно эллиптического дифференциального выражения совпадает с понятием эллиптического выражения (для вещественных коэффициентов!) (см. гл. II, § 6, п. 1). Для резольвенты соответствующего оператора $\overline{L}$ справедлива указанная оценка в любом секторе $|\arg \lambda| \leqslant \varphi$ с $\varphi < \pi$. Поэтому решения аналитичны во всей правой полуплоскости.

Недавно были изучены операторы, порождаемые сильно эллиптическим выражением $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ на функциях, удовлетворяющих граничным условиям не первой краевой задачи, а некоторым общим граничным условиям (так называемым условиям Лопатинского). В пространствах L_p $(p > 1)$ получены оценки резольвент операторов, аналогичные приведенным выше. Таким образом, для решений соответствующих краевых задач для сильно параболической системы справедливы те же выводы, что и для первой краевой задачи.

3. Задача Коши для уравнения с постоянными коэффициентами. Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = \sum_{k=1}^{m} P_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}},$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка n-мерного пространства R_n. $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — линейное дифференциальное выражение с постоянными коэффициентами, содержащее производные по t

порядка не выше $m-1$. Заменой $u=u_1$, $u'_t=u_2$, ..., $u_t^{(m-1)}=u_m$ уравнение можно свести к системе

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=u_2,\ \ldots,\ \frac{\partial u_{m-1}}{\partial t}=u_m,\ \frac{\partial u_m}{\partial t}=\sum_{k=1}^{m} P_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u_k.$$

Полученную систему можно трактовать как уравнение $u'_t=Au$ в гильбертовом пространстве вектор-функций $\overline{L}_2(R_n)$. Оператор A является замыканием оператора, определенного матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ P_1 & P_2 & P_3 & \ldots & P_k \end{pmatrix}$$

на достаточно гладких функциях таких, что $P_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u_k \in L_2(R_n)$.

Ставится вопрос: когда уравнение $u'_t=Au$ будет абстрактным параболическим? Оказывается, что для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

а) уравнение *корректно по Петровскому*, т. е. для всех корней уравнения

$$s^m=P(s,\ i\xi)$$

при любом вещественном векторе $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Im} s<C,$$

где константа C не зависит от выбора вектора ξ;

б) для любого $a>0$ найдется такое b, что

$$|\operatorname{Im} s| \leqslant a \ln|\operatorname{Re} s|-b.$$

Если выполнено более сильное неравенство

$$|\operatorname{Im} s| \leqslant a_1|\operatorname{Re} s|^h-b_1$$

при некоторых вещественных b_1, $a_1>0$ и $h\geqslant 1$, то полугруппа, соответствующая задаче, будет допускать аналитическое продолжение в некоторый сектор, содержащий положительную вещественную полуось.

Если, наконец, $h>1$, то полугруппа аналитична в правой полуплоскости.

4. Уравнение Шредингера. В трехмерном пространстве R_3 рассматривается уравнение

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\Delta\psi + v(x)\,\psi,$$

где Δ — оператор Лапласа.

При определенных условиях на функцию $v(x)$ оператор H, получаемый замыканием оператора, определенного дифференциальным выражением $-\Delta + v(x)$ на финитных функциях, будет самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $L_2(R_3)$. Прямая и обратная задачи Коши равномерно корректны на всей оси. Уравнение порождает группу унитарных операторов $U(t) = e^{-iHt}$ (см. гл. VII, § 1, п. 4).

5. Симметрические гиперболические системы. Рассматривается система уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum A_i(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i} + Bu,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$; $u(t, x)$ — m-мерная вектор-функция; $A_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $B(x)$ — m-мерные квадратные матрицы, гладко зависящие от x; $A_i(x)$ — симметрические матрицы.

Если, например, предположить, что $A_i(x)$ и $B(x)$ — периодические функции по всем переменным, и рассмотреть оператор $A_i\frac{\partial}{\partial x_i} + B$ на периодических дифференцируемых функциях, то вещественная часть его замыкания будет ограниченным оператором $B + B^* - \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$ (случай 4), п. 7). Задача об отыскании периодических (по пространственным координатам) решений системы будет равномерно корректной на любом промежутке $[0, T]$ в пространстве $\overline{L}_2(Q)$, где Q — параллелепипед периодов.

Если выполнено условие

$$B + B^* - \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \leqslant 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. матрицы $B+B^*-\frac{\partial A_i}{\partial x_i}$ отрицательно определенные, то соответствующий оператор будет максимальным диссипативным и соответствующая полугруппа будет состоять из сжимающих операторов.

При выполнении условия $B+B^*-\frac{\partial A_i}{\partial x_i}\leqslant 0$ в некоторой области G оператор $A_i\frac{\partial}{\partial x_i}+B$ будет диссипативным на функциях, удовлетворяющих на границе Г области условию

$$\int_\Gamma\left(\sum A_i n_i\, u,\ u\right)dx\leqslant 0,$$

где n_i — компоненты нормали к Г. Например, это условие выполнено на финитных функциях.

В последнее время детально изучались виды граничных условий, определяющих максимальные диссипативные расширения соответствующего оператора.

9. Уравнения в пространстве с базисом. Континуальные интегралы. Если в банаховом пространстве E имеется базис $\{e_i\}$, то решения дифференциальных уравнений можно искать в виде разложений по базису. В этом пункте будет приведен ряд формул для решений, носящий формальный характер. Вопросы сходимости разложений рассматриваться не будут.

Если в пространстве E имеется базис $\{e_i\}$ из собственных векторов оператора A, то решение задачи Коши $x'=Ax$, $x(0)=x_0$ можно записать в виде

$$x(t)=\sum_i c_i e^{\lambda_i t} e_i,$$

где λ_i — собственные числа оператора A, а коэффициенты c_i находятся из разложения $x_0=\sum_i c_i e_i$.

Если теперь рассмотреть уравнение

$$\frac{dx}{dt}=(A+B)\,x,$$

то решение задачи Коши для него можно также искать в виде $x(t)=\sum a_i(t)\,e_i$. Для функций $a_i(t)$ получается бесконечная система дифференциальных уравнений

$$\frac{da_i}{dt}=\lambda_i a_i+\sum_k b_{ik}a_k,$$

где (b_{ik}) — матрица, которой задается оператор B в базисе (e_i).

Описанный метод нахождения решений в виде их разложений по базису собственных векторов оператора A носит название *метода Фурье*.

Пусть теперь в пространстве E задан произвольный базис $\{e_i\}$, образующий биортогональную систему с совокупностью линейных функционалов $\{f_i\}$. Пусть $x_i(t)$ — решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt}=Ax, \qquad x_i(0)=e_i.$$

Систему $\{x_i(t)\}$ называют *фундаментальной системой решений относительно базиса* $\{e_i\}$.

Матрицу-функцию с элементами $s_{ij}(t)=f_i(x_j(t))$ называют *фундаментальной матрицей уравнения в базисе* $\{e_i\}$.

Если x_0 — элемент, имеющий в базисе разложение $x_0=\sum_i c_i e_i$, то решение задачи Коши с начальным условием $x(0)=x_0$ можно записать в виде

$$x(t)=\sum_{i,j}s_{ij}(t)\,c_j e_i.$$

Функции $s_{ij}(t)$ удовлетворяют тождеству

$$\sum_k s_{ik}(t)\,s_{kj}(\tau)=s_{ij}(t+\tau).$$

Если оператор A таков, что $s_{ij}(t)\geqslant 0$ и $\sum_j s_{ij}(t)=1$, то числа $s_{ij}(t)$ можно трактовать как вероятности перехода некоторой системы из состояния e_i в состояние e_j. Матрица $(s_{ij}(t))$ в этом случае описывает так называемый марковский процесс со счетным числом состояний.

Пусть теперь оператор B таков, что функционалы $f_i(x)$ являются собственными элементами для оператора B^* с собственными числами α_i:

$$f_i(Bx)=\alpha_i f_i(x).$$

Ставится задача о нахождении фундаментальной матрицы $(S_{ij}(t))$ для уравнения

$$\frac{dx}{dt}=(A+B)\,x.$$

Оказывается, что эта матрица может быть вычислена по формуле

$$S_{ij}(t)=$$
$$=\lim \sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=1}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=1}^{\infty} e^{\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{i_k}\Delta t_k} s_{ii_1}(\Delta t_1)\, s_{i_1 i_2}(\Delta t_2)\ \ldots\ s_{i_n j}(\Delta t_{n+1}),$$

где $\Delta t_k > 0$ и $\sum_{k=1}^{n+1}\Delta t_k = t$, предел берется по разбиениям отрезка $[0,\ t]$, когда $\max \Delta t_k \to 0$. Последний предел часто записывают в виде так называемого *континуального интеграла*

$$S_{ij}(t)=\int e^{\int_0^t \alpha(\tau)\,d\tau}\, d\mu_{ij}.$$

При этом под интегралом

$$\int \Phi(\alpha(\tau))\, d\mu_{ij}$$

от функционала Φ, определенного на множестве всех кусочно-постоянных функций $\alpha(\tau)$ со значениями в множестве собственных чисел оператора B^*, понимают

$$\lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=1}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=1}^{\infty} \Phi(\alpha_{i_1,\ldots,i_n}(\tau))\, s_{ii_1}(\Delta t_1)\ldots s_{i_n j}(\Delta t_{n+1}),$$

где функция $\alpha_{i_1,\ldots,i_n}(\tau)$ равна μ_{ik} на отрезке Δt_k.

Если рассмотреть уравнение

$$\frac{dx}{dt}=(A+f(B))\,x,$$

то его фундаментальная матрица запишется в виде

$$S_{ij}(t)=\int e^{\int_0^t f(\alpha(\tau))\,d\tau}\, d\mu_{ij}.$$

До сих пор рассматривался случай дискретного базиса. Иногда решения разлагают по континуальным базисам. Так, например, за такой базис принимают совокупность всех обобщенных собственных функций самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве с непрерывным спектром (см. гл. II, § 3, п. 8). Тогда во всех предыдущих формулах бесконечные суммы заменяются интегралами. В частности, континуальный интеграл является уже не пределом n-кратных сумм, а пределом n-кратных интегралов.

Пример. Уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Континуальный базис состоит из функций

$$e_i=\delta(x-i)\quad(-\infty<i<\infty)$$

(см. гл. VIII, § 1, п. 1) — собственных функций оператора умножения на аргумент. Фундаментальная система решений (см. п. 2):

$$u_i(t,\ x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-(x-s)^2}{4t}}\delta(s-i)\,ds=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{\frac{-(x-i)^2}{4t}}.$$

Фундаментальная матрица:

$$s_{ij}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u_j(t,x)\,\delta(x-i)\,dx=u_j(i)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{\frac{-(i-j)^2}{4t}}.$$

Континуальный интеграл

$$\int\Phi(\alpha(\tau))\,d\mu_{ij}$$

на отрезке $[0,\ T]$ определяется так: строится разбиение отрезка $[0,\ T]$ точками $0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n<t_{n+1}=T$. Рассматриваются все непрерывные функции $\alpha(t)$, линейные на каждом из частичных отрезков Δt_k, такие, что $\alpha(0)=i$ и $\alpha(T)=j$. Пусть $\alpha(t_k)=\alpha_k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, тогда на рассматриваемом классе функций функционал $\Phi(\alpha(\tau))$ переходит в некоторую функцию n переменных $\Phi(\alpha(\tau))=\Phi(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$. Тогда

$$\int\Phi(\alpha(\tau))\,d\mu_{ij}=$$

$$=\lim_{\max\Delta t_k\to 0}\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n}\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}}^{n}\Phi(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{\Delta t_1\ldots\Delta t_{n+1}}}e^{-\frac{1}{4}\sum_{s=1}^{n+1}\frac{(\alpha_s-\alpha_{s-1})^2}{\Delta t_s}}\,d\alpha_1\ldots d\alpha_n,$$

где $\alpha_0=i$ и $\alpha_{n+1}=j$.

Полученный континуальный интеграл называется *винеровским*.

Фундаментальную матрицу для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+V(x)\,u$$

можно записать в виде

$$s_{ij}(t)=\int e^{\int_0^t V(\alpha(\tau))\,d\tau}\,d\mu_{ij}.$$

§ 3. Уравнение с переменным неограниченным оператором

1. Однородное уравнение. При рассмотрении однородного уравнения

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x \quad (0\leqslant t\leqslant T)$$

с оператором $A(t)$, зависящим от t, обычно предполагают, что при каждом t этот оператор является производящим оператором полугруппы, обладающей теми или иными свойствами. Кроме того, зависимость $A(t)$ от t предполагается гладкой. Для того чтобы сформулировать то или иное условие гладкости неограниченной оператор-функции $A(t)$, естественно предполагать, что эта функция определена при различных t на одних и тех же элементах пространства. В связи с этим в этом пункте делается следующее предположение.

Область определения оператора $A(t)$ не зависит от t:

$$D(A(t))=D.$$

Теперь можно сформулировать две группы условий, обеспечивающих корректность постановки задачи Коши для уравнения с переменным оператором:

I. 1) При каждом $t\in[0, T]$ оператор $A(t)$ является производящим оператором сжимающей полугруппы, и более того, для нормы его резольвенты справедливо неравенство

$$\|R_{A(t)}(\lambda)\|\leqslant\frac{1}{1+\operatorname{Re}\lambda} \quad \text{при } \operatorname{Re}\lambda\geqslant 0.$$

2) Ограниченная оператор-функция $A(t)A^{-1}(s)$ является сильно непрерывно дифференцируемой по t при любом s.

II. 1) При каждом $t\in[0, T]$ оператор $A(t)$ является производящим оператором аналитической полугруппы и для нормы его резольвенты справедлива оценка

$$\|R_{A(t)}(\lambda)\|\leqslant\frac{C}{1+|\lambda|} \quad \text{при } \operatorname{Re}\lambda\geqslant 0,$$

где C не зависит от t.

2) Оператор-функция $A(t)A^{-1}(s)$ удовлетворяет условию Гёльдера

$$\|[A(t)-A(\tau)]A^{-1}(s)\|\leqslant C_1|t-\tau|^{\gamma},$$

где C_1 не зависит от s, t и τ и $0<\gamma\leqslant 1$.

При выполнении групп условий I или II существует разрешающий оператор $U(t, s)$ $(t \geqslant s)$, ограниченный и сильно непрерывный по совокупности переменных t и s при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. При этом $U(s, s) = I$. Решение задачи Коши для уравнения $x' = A(t)x$ с начальным условием $x(0) = x_0 \in D$ единственно и задается формулой

$$x(t) = U(t, 0)x_0.$$

Если начальное условие задано при $t = s$, $x(s) = x_0$, то решение имеет вид $x(t) = U(t, s)x_0$.

Операторы $U(t, s)$ обладают свойством

$$U(t, \tau) = U(t, s)U(s, \tau) \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant s \leqslant t \leqslant T).$$

Обобщенные решения $U(t, 0)x_0$ уравнения $x' = A(t)x$ при любом $x_0 \in E$ являются непрерывными функциями на $[0, T]$. Если выполнены условия II, то всякое обобщенное решение является решением ослабленной задачи Коши, т. е. дифференцируемо и удовлетворяет уравнению при всех $t \in (0, T]$. Для производных ослабленных решений имеет место оценка $\|x'(t)\| \leqslant \frac{C_1}{t}\|x_0\|$.

При условиях I разрешающий оператор $U(t, s)$ может быть построен как «мультипликативный интеграл»

$$U(t, s) = \lim \prod_{i=1}^{n} U_{A(\tau_i)}(\Delta t_i).$$

Здесь $s = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ — разбиение отрезка $[s, t]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, τ_i — точки внутри отрезков $[t_{i-1}, t_i]$, $U_{A(\tau)}$ — полугруппа, порожденная оператором $A(\tau)$. Предел берется при $\max \Delta t_i \to 0$ и существует в сильном смысле.

При условиях II разрешающий оператор $U(t, s)$ может быть получен как решение интегрального уравнения

$$U(t, s) = U_{A(s)}(t) + \int_s^t U(t, \tau)[A(\tau) - A(s)]\, U_{A(s)}(\tau - s)\, d\tau.$$

Если оператор $A(t)$ допускает аналитическое продолжение в область, содержащую интервал $(0, T)$, то при выполнении условий II все обобщенные решения $U(t, 0)x_0$ будут аналитичными в некоторой области, содержащей $(0, T)$.

Замечание. В условиях I и II можно всюду заменить λ на $\lambda-\omega$ и соответственно оператор $A(t)A^{-1}(s)$ на оператор $(A(t)-\omega I)\times\times(A(s)-\omega I)^{-1}$. Этот случай сводится к рассмотренному заменой $x=e^{\omega t}y$.

2. Случай оператора $A(t)$ с переменной областью определения. В случае, когда $A(t)$ — дифференциальный оператор, его область определения обычно состоит из достаточно гладких функций, удовлетворяющих некоторым граничным условиям. Предположенная в предыдущем пункте независимость области определения $D(A(t))$ от t означает в приложениях независимость от t коэффициентов в граничных условиях, поэтому снятие этого условия представляет значительный интерес. Оказывается, что в ряде случаев некоторая дробная степень $A^{\alpha}(t)$ оператора $A(t)$ (определение дробных степеней операторов см. в п. 4) имеет область определения, состоящую из функций, не стесненных никакими граничными условиями, и следовательно, область определения не зависит от t.

Условие 2) группы II можно заменить следующим:

2′) При некотором $\alpha\in(0, 1)$ операторы $A^{\alpha}(t)$ имеют область определения, не зависящую от t, причем оператор $A^{\alpha}(t)\ A^{-\alpha}(s)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\gamma>1-\alpha$:

$$\|[A^{\alpha}(t)-A^{\alpha}(\tau)]\,A^{-\alpha}(s)\|\leqslant C_1|t-\tau|^{\gamma}.$$

Если выполнено условие 1) группы II и условие 2′), то существует разрешающий оператор $U(t, s)$, обладающий теми же свойствами, что и при выполнении группы условий II.

Следует отметить, что проверка условия 2′) является затруднительной, так как для дробных степеней конкретных, например дифференциальных, операторов нет явных формул. Это условие можно проверить для операторов в гильбертовом пространстве, удовлетворяющих условиям 5) § 2, п. 7. Пусть $A(t)$ при каждом t является максимальным диссипативным оператором, форма которого $(A(t)x, x)$ обладает свойствами

$$|\operatorname{Re}(A(t)x,\ x)|\geqslant\delta(x,\ x)\ \text{ и }\ |\operatorname{Im}(A(t)x,\ x)|\leqslant \leqslant\beta|\operatorname{Re}(A(t)x,\ x)|,$$

где константы $\delta>0$ и β не зависят от t. Тогда оператор

$A(t)$ удовлетворяет условию 1) группы II. Форма $(A(t)x, x)$ может быть расширена путем замыкания до формы $A_t(x, x)$, определенной на более широком множестве элементов, чем $D(A(t))$. Предполагается, что область определения D формы $A_t(x, x)$ не зависит от t и на ней форма удовлетворяет условию Гёльдера вида

$$|A_t(x, x) - A_\tau(x, x)| \leqslant M|t-\tau|^\gamma (x, x).$$

При этих условиях область определения оператора $A^\alpha(t)$ при $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ не зависит от t и

$$\|[A^\alpha(t) - A^\alpha(\tau)]A^{-\alpha}(s)\| \leqslant C_1|t-\tau|^\gamma.$$

Таким образом, если $\gamma \geqslant \frac{1}{2}$, то оператор $A(t)$ удовлетворяет условию 2′).

3. Неоднородное уравнение. Для решения неоднородного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$$

можно применить метод вариации произвольных постоянных. Тогда решение задачи Коши с начальным условием $x(0) = x_0$ формально можно записать в виде

$$x(t) = U(t, 0)x_0 + \int_0^t U(t, s)f(s)\,ds.$$

Если разрешающий оператор $U(t, s)$ сильно непрерывен по t и s и функция $f(s)$ непрерывна, то написанный интеграл существует и является непрерывной функцией t. Однако он, вообще говоря, не будет дифференцируемой функцией от t, поэтому следует считать, что написанная формула дает *обобщенное решение* неоднородного уравнения.

Если выполнены условия группы I п. 1, то обобщенное решение будет истинным решением задачи Коши при условии, что $x_0 \in D$ и функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема. Последнее условие можно заменить таким: $f(t) \in D$ при всех $t \in [0, T]$ и функция $A(0)f(t)$ непрерывна.

Если выполнены условия группы II п. 1, то обобщенное решение будет решением ослабленной задачи Коши (см. § 2, п. 4) при любом $x_0 \in E$ и функции $f(t)$, удовлетворяющей суловию Гёльдера

$$\|f(t)-f(\tau)\| \leqslant C|t-\tau|^{\delta} \quad (0<\delta\leqslant 1).$$

Если, кроме того, $x_0 \in D$, то написанная формула дает истинное решение задачи Коши.

При исследовании неоднородного уравнения полезным является тот факт, что при условиях I или II оператор-функция $A(t)U(t, s)A^{-1}(0)$ является ограниченной и сильно непрерывной функцией переменных t и s. Если, кроме того, функция $A(t)A^{-1}(0)$ имеет вторую непрерывную сильную производную, то оператор-функция $A^2(t)U(t, s)A^{-2}(0)$ является ограниченной и сильно непрерывной функцией t и s.

4. Дробные степени операторов. Для самосопряженных положительных операторов в гильбертовом пространстве дробные степени определяются с помощью спектрального разложения (см. § 2, п. 7).

Пусть A — замкнутый линейный оператор с всюду плотной областью определения $D(A)$, имеющий резольвенту на отрицательной полуоси, удовлетворяющую условию

$$\|(A+\lambda I)^{-1}\| < \frac{M}{|\lambda|} \qquad (\lambda>0).$$

При $0<\alpha<1$ и $x \in D(A)$ определен оператор

$$I_\alpha x = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}(A+\lambda I)^{-1} x\, d\lambda.$$

Оператор I_α допускает замыкание, которое и называется *дробной степенью оператора* A и обозначается через A^α.

Если, кроме того, оператор A имеет ограниченный обратный оператор A^{-1}, то можно непосредственно определить ограниченные операторы, являющиеся дробными степенями оператора A^{-1}:

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}(A+\lambda I)^{-1}\, d\lambda.$$

Оператор $A^{-\alpha}$ является обратным к оператору A^{α}. Для показателей $\alpha > 1$ отрицательную степень $A^{-\alpha}$ можно определить формулой

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \frac{(n-1)!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-1-\alpha)} \int\limits_0^\infty \lambda^{n-1-\alpha} (A+\lambda I)^{-n}\, d\lambda,$$

которая имеет смысл при дробных α, заключениых между 0 и n. Если α стремится к целому числу $k < n$, то $\lim\limits_{\alpha \to k} A^{-\alpha} = A^{-k}$, причем предел понимается по норме операторов.

Операторы $A^{-\alpha}$ $(0 \leqslant \alpha < \infty)$ образуют полугруппу ограниченных операторов класса (C_0). Эта полугруппа равномерно непрерывна (по норме операторов) при $t > 0$.

Если оператор B является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы операторов $U(t)$, для нормы которой справедлива оценка

$$\| U(t) \| \leqslant Me^{-\omega t} \qquad (\omega > 0),$$

то для резольвенты оператора справедлива оценка

$$\| (B-\lambda I)^{-1} \| \leqslant \frac{M}{\lambda-\omega} \qquad (\lambda > \omega)$$

и, следовательно, для оператора $A = -B$ можно определить дробные степени. Эти степени могут быть выражены через полугруппу:

$$A^{-\alpha} = (-B)^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty \tau^{\alpha-1}\, U(\tau)\, d\tau \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Для дробных степеней операторов имеет место важное *«неравенство моментов»*: если α и β имеют одинаковый знак и $|\alpha| < |\beta|$, то

$$\| A^{\alpha} x \| \leqslant K(\alpha, \beta) \| A^{\beta} x \|^{\frac{\alpha}{\beta}} \| x \|^{1-\frac{\alpha}{\beta}},$$

где константа $K(\alpha, \beta)$ не зависит от выбора элемента x (если $\beta > 0$, то $x \in D(A^{\beta})$).

Для оператора A^α $(0<\alpha<1)$ определена резольвента при $\lambda<0$, которая может быть найдена по формуле

$$(A^\alpha+\lambda I)^{-1}=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\mu^\alpha(A+\mu I)^{-1}}{\lambda^2+2\lambda\mu^\alpha\cos\pi\alpha+\mu^{2\alpha}}\,d\mu.$$

Из этой формулы следует, что для оператора A^α справедливо неравенство

$$\|(A^\alpha+\lambda I)^{-1}\|\leqslant\frac{M}{\lambda}\qquad(\lambda>0)$$

с той же константой M, что и в аналогичном неравенстве для оператора A.

Из неравенства $\|\lambda(A+\lambda I)^{-1}\|\leqslant M$ при всех $\lambda>0$ следует, что оператор $\lambda(A+\lambda I)^{-1}$ равномерно ограничен в каждом секторе комплексной плоскости $|\arg\lambda|\leqslant\varphi$ при φ, не превосходящих некоторого числа $\pi-\psi$ $(0<\psi<\pi)$. Тогда оператор $\lambda(A^\alpha+\lambda I)^{-1}$ будет равномерно ограничен в каждом секторе $|\arg\lambda|\leqslant\varphi$ при $\varphi<\pi-\alpha\psi$. В частности, оператор $(-A)^{\frac{1}{2}}$ является производящим оператором аналитической полугруппы. Если оператор $-A$ является производящим оператором класса (C_0), то оператор $(-A)^\alpha$ при $0<\alpha<1$ будет производящим оператором аналитической полугруппы.

Если $0<\alpha$, $\beta<1$, то $(A^\alpha)^\beta=A^{\alpha\beta}$.

Для приложений очень важным является следующий факт:

Если A и B — два положительных самосопряженных оператора в гильбертовом пространстве и $D(B)\supset D(A)$, то при $0<\alpha<1$ имеет место включение

$$D(B^\alpha)\supset D(A^\alpha).$$

Более общо, пусть A и B — два положительных самосопряженных оператора, действующих соответственно в гильбертовых пространствах H и H_1. Если Q — ограниченный линейный оператор из H в H_1 такой, что $QD(A)\subset D(B)$ и

$$\|BQu\|\leqslant M\|Au\|\qquad(u\in D(A)),$$

то $QD(A^{\alpha}) \subset D(B^{\alpha})$ и

$$\|B^{\alpha}Qu\| \leqslant M_1 \|A^{\alpha}u\| \qquad (u \in D(A^{\alpha})).$$

Можно положить $M_1 = M^{\alpha} \|Q\|^{1-\alpha}$.

Аналогичное утверждение с другой константой M_1 справедливо для случая, когда A и B — максимальные диссипативные операторы в пространствах H и H_1.

Для банахова пространства последнее неравенство доказано при замене в правой части нормы $\|A^{\alpha}u\|$ на норму $\|A^{\beta}u\|$ с $\beta > \alpha$. Справедливость неравенства при одинаковых показателях не установлена.

Дробные степени операторов играют существенную роль при исследовании нелинейных дифференциальных уравнений.

ГЛАВА IV

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Вводные замечания

В этой главе рассматривается уравнение

$$x = Ax,$$

где A — оператор (вообще говоря, нелинейный), определенный в некотором банаховом пространстве E с областью значений в том же пространстве.

Примером оператора A может служить оператор

$$Ax(t) = \int_0^1 K[t, s, x(s)]\, ds$$

и, в частности, оператор

$$Ax(t) = \int_0^1 K(t, s) f[(s, x(s)]\, ds.$$

Первый из них принято называть *оператором Урысона*, второй — *оператором Гаммерштейна*.

Первый вопрос, возникающий при изучении указанного уравнения, это вопрос о существовании решения. Этот вопрос часто формулируют в такой форме: существует ли *неподвижная точка* при преобразовании A?

Оператор A может оказаться определенным на части T пространства E — тогда речь идет о неподвижных точках этого оператора, принадлежащих T.

Если требуется найти решение, обладающее дополнительным свойством, то выделяется подмножество $T_0 \subset T$ элементов, обладающих этим свойством, и неподвижная точка ищется в T_0. Например, в задачах, где ищутся неотрицательные решения, полагают $T_0 = T \cap K$, где K — соответствующий конус неотрицательных элементов E (см. гл. V).

Второй вопрос — это вопрос о единственности решения, т. е. о единственности (в T_0) неподвижной точки преобразования A.

Для нелинейных уравнений во многих случаях основной интерес представляют теоремы неединственности, т. е. теоремы о существовании двух и более решений. Например, в различных задачах теории устойчивости и теории волн заранее известно одно (тривиальное) решение задачи и основной целью является разыскание других (нетривиальных) решений.

В тех случаях, когда решение не единственно, ставится вопрос о количестве решений или об оценке этого количества сверху и снизу.

Часто приходится рассматривать уравнение

$$x = A(x; \lambda),$$

где оператор $A(x; \lambda)$ зависит от числового параметра λ (в некоторых задачах параметр также может являться элементом некоторого пространства).

Для уравнений с параметром возникает ряд новых задач, связанных с изменением количества решений при изменении параметра.

Особый интерес представляют те критические значения параметра λ, при которых решения разветвляются или сливаются.

Простейший пример уравнения с параметром дает задача о собственных числах и собственных элементах линейного оператора, т. е. задача о решениях уравнения

$$x = \frac{1}{\lambda} Ax,$$

где A — линейный оператор. Здесь при всех $\lambda \neq 0$ имеется тривиальное решение $x = \theta$. Те значения λ, при которых появляются другие решения, и называются собственными числами. Аналогично для нелинейного оператора λ называется *собственным числом*, если уравнение $Ax = \lambda x$ имеет решение $x \neq \theta$; x называется *собственным элементом* оператора A.

§ 1. Нелинейные операторы и функционалы

1. Непрерывность и ограниченность оператора. Пусть оператор A определен на множестве T банахова пространства E, а его значения принадлежат банахову пространству E_1. Оператор A называется *непрерывным в точке* $x_0 \in T$, если из $\|x_n - x_0\| \to 0$ $(x_n \in T)$ следует, что $\|Ax_n - Ax_0\| \to 0$.

Оператор A называют *слабо непрерывным в точке* x_0, если из слабой сходимости последовательности x_n к x_0 следует слабая сходимость Ax_n к Ax_0.

Иногда рассматриваются операторы A *усиленно непрерывные*, преобразующие слабо сходящиеся последовательности элементов в последовательности, сильно сходящиеся, и операторы A *ослабленно непрерывные*, преобразующие сильно сходящиеся последовательности элементов в последовательности, слабо сходящиеся.

Если пространство E_1 — числовая прямая, то операторы со значениями в пространстве E_1 называются *функционалами*.

Оператор A *ограничен* на T, если

$$\sup_{x \in T} \|Ax\| < \infty.$$

В отличие от линейных операторов из ограниченности нелинейного оператора на некотором шаре не вытекает его непрерывность. Из непрерывности оператора A на некотором множестве T вытекает его ограниченность в окрестности каждой точки (*локальная ограниченность*), однако непрерывный в каждой точке замкнутого шара оператор A может не быть ограниченным на всем шаре (если пространство E бесконечномерно). Примером такого оператора может служить оператор, определенный на всем пространстве l_2 равенством

$$Ax = (\xi_1, \xi_2^2, \ldots, \xi_n^n, \ldots) \quad (x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)).$$

Этот оператор непрерывен в каждой точке пространства l_2, но не является ограниченным ни на одном шаре $S(\theta, r)$ при $r > 1$.

Если множество T компактно, то непрерывный на этом множестве оператор A является ограниченным.

Оператор A *вполне непрерывен* на T, если он непрерывен и каждую ограниченную часть множества T преобразует в компактное множество пространства E_1.

Оператор A удовлетворяет на T *условию Липшица*, если

$$\|Ax_1 - Ax_2\| \leqslant L\|x_1 - x_2\| \qquad (x_1, x_2 \in T).$$

Оператор A, удовлетворяющий условию Липшица, непрерывен.

2. Дифференцируемость нелинейного оператора. Операторы, определенные на множествах числовой прямой, называются *абстрактными функциями*. Пусть $x(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ — абстрактная функция со значениями в банаховом пространстве E. Производная $x'(t)$ функции $x(t)$ определяется как предел при $\Delta t \to 0$ конечноразностного отношения:

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Если рассматривается предел по норме пространства E, то производная называется *сильной*, если рассматривается предел в смысле слабой сходимости в пространстве E, то производная называется *слабой*.

Оператор A, действующий из банахова пространства E в банахово пространство E_1, *дифференцируем по Фреше* в точке x_0, если существует линейный ограниченный оператор $A'(x_0)$, действующий из E в E_1 и такой, что

$$A(x_0 + h) - A(x_0) = A'(x_0)h + \omega(x_0; h),$$

где

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\omega(x_0; h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Оператор $A'(x_0)$ называется *производной Фреше* оператора A в точке x_0. Говорят, что оператор *равномерно дифференцируем* на шаре $T = \{\|x\| \leqslant a\}$, если

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{1}{\|h\|} \|\omega(x_0; h)\| = 0$$

равномерно относительно $x \in T$.

Линейный ограниченный оператор $A'(x_0)$ называется *производной Гато* оператора A в точке x_0, если

$$A'(x_0)h = \lim_{t \to 0} \frac{A(x_0 + th) - A(x_0)}{t}.$$

при всех $h \in E$. Другими словами, $A'(x_0)$ называется производной Гато, если $A'(x_0)h$ является сильной производной в точке $t=0$ функции $A(x_0+th)$ переменного t со значениями в пространстве E_1:

$$A'(x_0)h = \frac{d}{dt}A(x_0+th)\Big|_{t=0}.$$

Производная Фреше оператора A, если она существует, является также и производной Гато. Если в окрестности точки x_0 существует производная Гато $A'(x)$, непрерывная в точке x_0 (как оператор от x), то она является производной Фреше.

Выражение $A'(x_0)h$ называют *дифференциалом Фреше* (соответственно *дифференциалом Гато*) оператора A в точке x_0.

Если оператор A вполне непрерывен, то его производная Фреше $A'(x_0)$ является вполне непрерывным линейным оператором.

Если оператор A имеет на выпуклом множестве T производную Гато $A'(x)$, то для каждой пары точек $x, x+h \in T$ и каждого линейного функционала l из сопряженного к E_1 пространства E_1^* имеет место равенство

$$l(A(x+h)-Ax) = l(A'(x+\tau h)h),$$

где $\tau=\tau(l)\in(0, 1)$. Это равенство называют *формулой Лагранжа.*

Оператор A называется *асимптотически линейным*, если он определен на всех элементах x с достаточно большой нормой и если существует такой линейный оператор $A'(\infty)$, что

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\|A(x)-A'(\infty)x\|}{\|x\|} = 0.$$

Оператор $A'(\infty)$ называют *производной на бесконечности* оператора A.

3. Интегрирование абстрактных функций. *Интеграл Римана* от абстрактной функции $x(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ со значениями в банаховом пространстве E определяется как предел интегральных сумм:

$$\int_a^b x(t)\,dt = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} x(\tau_k)\,\Delta t_k \quad (\Delta t_k = t_k - t_{k-1};$$
$$t_{k-1} \leqslant \tau_k \leqslant t_k).$$

Если этот предел существует для любой последовательности разбиений интервала $[a, b]$ на части и не зависит от выбора этой последовательности и выбора точек τ_k, то функция $x(t)$ называется *интегрируемой по Риману*. Интеграл называется *сильным*, если интегральные суммы сходятся к нему по норме пространства E; если интегральные суммы сходятся слабо, то интеграл называется *слабым*.

Сильно непрерывная абстрактная функция сильно интегрируема по Риману. Следует отметить, что норма сильно интегрируемой по Риману абстрактной функции может быть неинтегрируемой по Риману скалярной функцией.

Для интеграла от абстрактной функции имеют место обычные свойства интеграла. В частности, если абстрактная функция $x(t)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную $x'(t)$, то справедлива формула

$$\int_a^b x'(t)\,dt = x(b) - x(a).$$

Из этой формулы вытекает интегральное представление приращения оператора A, имеющего непрерывную производную Гато:

$$A(x+h) - A(x) = \int_0^1 A'(x+th)\,h\,dt.$$

Обобщением интеграла Лебега на абстрактные функции является *интеграл Бохнера*. Абстрактная функция $x(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ называется *интегрируемой по Бохнеру*, если она сильно измерима и $\|x(t)\|$ является суммируемой по Лебегу скалярной функцией. При этом абстрактная функция $x(t)$ с значениями в пространстве E называется *сильно измеримой*, если она является равномерным пределом последовательности конечнозначных функций. Если пространство E сепарабельно, то понятие сильной измеримости абстрактной функции совпадает с понятием слабой измеримости. Функция $x(t)$ называется *слабо измеримой*, если для каждого линейного функционала $f \in E^*$ скалярная функция $f(x(t))$ измерима по Лебегу.

Интеграл Бохнера определяется следующим образом. Пусть сначала $x(t)$ — конечнозначная функция:

$$x(t) = x_i \quad (t \in \Delta_i, \quad \Delta_i \cap \Delta_j = 0 \quad (i \neq j), \quad \bigcup_1^k \Delta_i = [a, b]).$$

Тогда

$$(B)\int_a^b x(t)\,dt = \sum_{i=1}^k x_i \operatorname{mes} \Delta_i.$$

Пусть теперь $x(t)$ — произвольная интегрируемая по Бохнеру функция, а $x_n(t)$ — последовательность конечнозначных функций, сходящаяся к $x(t)$. Тогда по определению

$$(B)\int_a^b x(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} (B)\int_a^b x_n(t)\,dt.$$

Интеграл Бохнера обладает многими обычными свойствами интеграла Лебега. В частности,

$$\left\| (B)\int_a^b x(t)\,dt \right\| \leqslant \int_a^b \| x(t) \|\,dt.$$

Если $[a, b] = \bigcup \Delta_i$, $\Delta_i \cap \Delta_j = 0$, $i \neq j$, то

$$(B)\int_a^b x(t)\,dt = \sum (B)\int_{\Delta_i} x(t)\,dt.$$

Если A — линейный ограниченный оператор, действующий из пространства E в пространство E_1, а абстрактная функция $x(t)$ со значениями в E интегрируема по Бохнеру, то функция $Ax(t)$ со значениями в E_1 также интегрируема по Бохнеру и

$$(B)\int_a^b Ax(t)\,dt = A\left((B)\int_a^b x(t)\,dt\right).$$

Если A — неограниченный замкнутый линейный оператор, значения функции $x(t)$ принадлежат его области определения и функция $Ax(t)$ интегрируема по Бохнеру, то предыдущее равенство также справедливо. При этом интеграл, стоящий справа, принадлежит области определения оператора A.

4. Оператор Урысона в пространствах C и L_p. Пусть функция $K(t, s, x)$ непрерывна по совокупности переменных $(0 \leqslant t,\ s \leqslant 1,\ |x| \leqslant r)$. Тогда оператор Урысона

$$Ax(t) = \int_0^1 K[t, s, x(s)]\, ds$$

определен на всех функциях из шара $S(\theta, r)$ пространства C и его значения принадлежат C. Оператор A вполне непрерывен на $S(\theta, r)$.

Если существует непрерывная производная $K'_x(t, s, x)$, то оператор A дифференцируем по Фреше в каждой внутренней точке $x_0(t)$ шара $S(\theta, r)$. Его производная $A'(x_0)$ определяется формулой

$$A'(x_0)\, h(t) = \int_0^1 K'_x[t, s, x_0(s)]\, h(s)\, ds.$$

Для асимптотической линейности оператора A достаточно, чтобы функция $K(t, s, x)$ удовлетворяла условию

$$|K(t, s, x) - K_\infty(t, s)\, x| \leqslant \varphi(x) \quad (0 \leqslant t,\ s \leqslant 1,\ -\infty < x < \infty),$$

где

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{\varphi(x)}{|x|} = 0.$$

Оператор $A'(\infty)$ выражается при этом формулой

$$A'(\infty)\, h(t) = \int_0^1 K_\infty(t, s)\, h(s)\, ds.$$

Для рассмотрения оператора Урысона на всем пространстве C или в пространстве L_p необходимо, чтобы функция $K(t, s, x)$ была определена при всех значениях $0 \leqslant t,\ s \leqslant 1$, $-\infty < x < \infty$. Если эта функция по переменной x растет быстрее любой степенной (например, содержит экспоненциальные нелинейности), то оператор Урысона не будет определен ни на каком пространстве L_p. В связи с этим налагаются ограничения на рост функции $K(t, s, x)$ по x.

Пусть

$$|K(t, s, x)| \leqslant R(t, s)(a + b|x|^{\alpha_0})$$
$$(0 \leqslant t,\ s \leqslant 1,\ -\infty < x < \infty),$$

где $\alpha_0 \geqslant 0$, а функция $R(t, s)$ суммируема по совокупности переменных с некоторой степенью $\beta_0 > 1$:

$$\int_0^1 \int_0^1 |R(t, s)|^{\beta_0}\, dt\, ds < \infty.$$

Если

$$\alpha_0 \leqslant \beta_0 - 1,$$

то оператор Урысона действует и вполне непрерывен в каждом пространстве L_p, где $p > 1$ и

$$\frac{\alpha_0\beta_0}{\beta_0 - 1} \leqslant p \leqslant \beta_0.$$

В некоторых случаях оператор Урысона удобно рассматривать как оператор, действующий из одного пространства L_{p_1} в другое L_{p_2}.

Оператор Урысона действует из L_{p_1} в L_{p_2} и вполне непрерывен, если

$$p_1 > 1,\ p_1 \geqslant \frac{\alpha_0\beta_0}{\beta_0 - 1},\ \ 1 < p_2 \leqslant \beta_0.$$

Условие $\alpha_0 \leqslant \beta_0 - 1$ здесь, естественно, не предполагается выполненным.

Если функция $K(t, s, x)$ содержит существенно нестепенные нелинейности, то в ряде случаев оператор Урысона вполне непрерывен в некотором пространстве Орлича.

Как и в случае пространства C, производную оператора Урысона, действующего в пространстве L_p, естественно искать в виде интегрального оператора с ядром $K'_x(t, s, x_0(s))$. Однако дифференцируемость оператора Урысона как оператора, действующего в L_p, не вытекает из непрерывной дифференцируемости по переменной x функции $K(t, s, x)$. Например, оператор

$$Ax(t) = \int_0^1 \sin(e^{x(s)})\, ds \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

действует и вполне непрерывен в любом L_p, однако оператор

$$\int_0^1 e^{x_0(s)} \cos e^{x_0(s)} h(s)\, ds$$

даже не определен на L_p, если функция $e^{x_0(t)}$ несуммируема.

Для того чтобы интегральный оператор с ядром $K'_x[t, s, x_0(s)]$ *являлся производной Фреше оператора Урысона, действующего в пространстве* L_p $(p > 1)$, *достаточно, чтобы функция* $K'_x(t, s, x)$ *была непрерывна по* x *и чтобы выполнялось неравенство*

$$|K'_x(t, s, x)| \leqslant a + b|x|^{p-1} \qquad (0 \leqslant t,\ s \leqslant 1,\ -\infty < x < \infty).$$

5. Оператор f. Пусть функция $f(t, x)$ определена при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $-\infty < x < \infty$. Всюду в дальнейшем предполагается, что функция $f(t, x)$ непрерывна по x и измерима по t при каждом x. Равенство

$$fx(t) = f[t, x(t)]$$

определяет оператор f.

Если $f(t, x)$ *непрерывна по совокупности переменных, то оператор* f *действует в пространстве* C, *непрерывен и ограничен на каждом шаре.*

Если оператор f *действует из пространства* L_{p_1} *в пространство* L_{p_2}, *то он непрерывен и ограничен на каждом шаре. Для того чтобы оператор* f *действовал из* L_{p_1} *в* L_{p_2}, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$|f(t, x)| \leqslant a(t) + b|x|^{\frac{p_1}{p_2}},$$

где $a(t) \in L_{p_2}$.

Следует иметь в виду, что оператор f не обладает свойством полной непрерывности (кроме тривиального случая, когда $f(t, x)$ не зависит от x).

Если функция $f(t, x)$ вместе со своей производной $f'_x(t, x)$ непрерывна по совокупности переменных, то оператор f, рассматриваемый как оператор в пространстве C, дифференцируем по Фреше. Его производная Фреше имеет вид

$$f'(x_0)h(t) = f'_x[t, x_0(t)]\, h(t).$$

Пусть f действует из L_{p_1} в L_{p_2}. Из существования непрерывной производной $f'_x(t, x)$ не вытекает дифференцируемости по Фреше оператора f. Достаточным условием, при котором оператор умножения на $f'_x[t, x_0(t)]$ является производной Фреше оператора f, действующего из L_{p_1} в L_{p_2}, где $p_1 > p_2$, служит неравенство

$$|f'_x(t, x)| \leqslant a_1(t) + b_1 |x|^{\frac{p_1}{p_2} - 1},$$

где $a_1(t) \in L_{\frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2}}$.

В некоторых случаях оператор f дифференцируем в одних точках пространства L_{p_1} и недифференцируем в других.

6. Оператор Гаммерштейна. Если ядро $K(t, s)$ непрерывно, то линейный оператор

$$Kx(t) = \int_0^1 K(t, s)\, x(s)\, ds$$

действует из любого пространства L_p и из пространства C в каждое пространство L_{p_1} и в пространство C и является вполне непрерывным оператором. *Для того чтобы этот оператор действовал из L_{p_1} в L_{p_2} и был вполне непрерывен, достаточно выполнения неравенства*

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(t, s)|^r\, dt\, ds < \infty,$$

где $r = \max\left\{p_2, \dfrac{p_1}{p_1 - 1}\right\}$.

Оператор Гаммерштейна

$$Ax(t) = Kfx(t) = \int_0^1 K(t, s)\, f[s, x(s)]\, ds$$

является частным случаем рассмотренного выше оператора Урысона. Возможность представления оператора Гаммерштейна в виде произведения Kf позволяет указать менее ограничительные условия полной непрерывности этого оператора в пространствах L_p.

Для полной непрерывности оператора Гаммерштейна в пространстве L_p достаточно, чтобы оператор f действовал из L_p в некоторое пространство L_{p_1}, а линейный оператор K был вполне непрерывным оператором, действующим из L_{p_1} в L_p.

Если оператор f, рассматриваемый как оператор из L_p в L_{p_1}, дифференцируем в точке x_0, а оператор K действует из L_{p_1} в L_p, то оператор Гаммерштейна $A = Kf$ также дифференцируем в точке x_0, причем

$$A'(x_0)h(t) = Kf'(x_0)h(t) = \int_0^1 K(t, s) f'_x[(s, x_0(s)] h(s)\,ds.$$

7. Производные высших порядков. Производные высших порядков от абстрактных функций определяются обычным путем. Сложнее обстоит дело с производными высших порядков от операторов.

Оператор $B(x_1, x_2)$ $(x_1, x_2 \in E)$ со значениями в пространстве E_1 называется *билинейным*, если он является линейным ограниченным оператором по каждому переменному. Билинейный оператор $B(x_1, x_2)$ называется *симметрическим*, если

$$B(x_1, x_2) = B(x_2, x_1).$$

Если в симметрическом билинейном операторе $B(x_1, x_2)$ положить $x_1 = x_2 = x$, то получится оператор $B_2(x) = B(x, x)$, который называют *квадратичным*.

Оператор A, действующий из банахова пространства E в банахово пространство E_1, называется *дважды дифференцируемым по Фреше* в точке x_0, если

$$A(x_0 + h) - A(x_0) = B_1(h) + \frac{1}{2} B_2(h) + \omega_2(x_0; h),$$

где $B_1 = B_1(x_0)$ — линейный относительно h оператор, $B_2 = B_2(x_0)$ — квадратичный относительно h оператор, а

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\omega_2(x_0; h)\|}{\|h\|^2} = 0.$$

Квадратичный оператор $B_2(x_0)$ называется *второй производной Фреше* оператора A в точке x_0:

$$B_2(x_0) = A''(x_0).$$

Выражение $B_2(x_0)(h)$ называют *вторым дифференциалом Фреше* оператора A в точке x_0.

Иногда рассматривают *вторую последовательную производную Фреше* оператора A — производную Фреше от первой производной Фреше. Вторая последовательная производная Фреше является билинейным оператором относительно приращений h и h_1.

Если непрерывная по совокупности переменных функция $K(t, s, x)$ дважды непрерывно дифференцируема по x, то оператор Урысона, действующий в пространстве C, имеет вторую производную Фреше

$$A''(x_0)h = \int_0^1 K''_{x^2}[t, s, x_0(s)]\, h^2(s)\, ds.$$

Вторая последовательная производная Фреше оператора Урысона определяется формулой

$$A''(x_0)(h_1, h_2) = \int_0^1 K''_{x^2}[t, s, x_0(s)]\, h_1(s)\, h_2(s)\, ds.$$

Квадратичный оператор $B(x_0)(h)$ называется *второй производной Гато* оператора A в точке x_0, если для любого $h \in E$

$$\frac{d^2}{dt^2} A(x_0 + th)\big|_{t=0} = B(x_0)(h).$$

Выражение $B(x_0)(h)$ называется *вторым дифференциалом Гато* оператора A в точке x_0.

Вторая последовательная производная Гато оператора A определяется как производная Гато от первой производной Гато. Она является билинейным оператором.

Следует иметь в виду, что из существования второй производной Фреше оператора A не вытекает, вообще говоря, существования второй производной Гато. Например, скалярная функция $f(t) = t^3 \cos \frac{1}{t^2}$ имеет в точке $t = 0$ вторую производную Фреше, равную нулю, но не имеет в этой точке второй производной Гато.

8. Потенциальные операторы. Дифференцируемые функционалы являются частным случаем дифференцируемых операторов. Если $\Phi(x)$ — дифференцируемый по Фреше нелинейный функционал, определенный на банаховом пространстве E, то

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=l(h)+\omega(x;h),$$

где l — линейный функционал, зависящий от x, а

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{|\omega(x;h)|}{\|h\|}=0.$$

Если функционал $\Phi(x)$ дифференцируем в каждой точке x некоторого множества $T\subset E$, то равенство

$$\Gamma(x)=l$$

определяет оператор, действующий из $T\subset E$ в сопряженное пространство E^*. Этот оператор называют *градиентом Фреше функционала* $\Phi(x)$:

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=\Gamma(x)(h)+\omega(x;h).$$

Функционал $\Phi(x)$ называется *равномерно дифференцируемым* на множестве T, если стремление к нулю отношения $\frac{|\omega(x;h)|}{\|h\|}$ происходит равномерно относительно $x\in T$.

Примером дифференцируемого функционала в гильбертовом пространстве H является норма

$$\Phi(x)=\|x\|=\sqrt{(x,x)}.$$

В этом случае при $\|x\|\neq 0$

$$\operatorname{grad}\Phi(x)=\frac{x}{\|x\|}.$$

Дифференцируемым функционалом является также норма в пространствах L_p $(p>1)$: если

$$\Phi(x)=\|x\|=\left(\int_0^1|x(s)|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}},$$

то при $\|x\|\neq 0$

$$\operatorname{grad}\Phi(x)=\frac{|x(s)|^{p-1}\operatorname{sign}x(s)}{\|x\|^{p-1}}.$$

Градиент Гато функционала $\Phi(x)$ определяется равенством

$$\frac{d}{dt}\Phi(x+th)\Big|_{t=0}=\Gamma(x)(h).$$

Операторы, которые являются градиентами некоторых функционалов, называются *потенциальными*. Примером потенциального оператора может служить ограниченный линейный самосопряженный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H. Он является градиентом функционала $\Phi(x)=\frac{1}{2}(Ax, x)$.

Другим примером потенциального оператора может служить оператор f:

$$fx(t)=f[t, x(t)],$$

действующий из L_p в $L_{p'}$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$. Он является градиентом так называемого *функционала Гаммерштейна — Голомба*

$$\Phi(x)=\int_0^1\left[\int_0^{x(t)} f(t, u)\,du\right]dt,$$

определенного на пространстве L_p.

Пусть B — линейный ограниченный оператор, действующий из банахова пространства E в банахово пространство E_1. Пусть $\Phi(y)$ — дифференцируемый функционал, определенный на E_1. Тогда функционал

$$F(x)=\Phi(Bx),$$

определенный на E, также дифференцируем и

$$\operatorname{grad}\Phi(x)=B^*\operatorname{grad}\Phi(Bx),$$

где B^* — сопряженный к B оператор.

§ 2. Существование решений

1. Метод последовательных приближений. Пусть дано уравнение

$$x=Ax,$$

где A — некоторый нелинейный оператор. Основным способом доказательства существования решений этого уравнения, т. е. доказательства существования неподвижной точки оператора A, остается метод последовательных приближений. Он заключается в том, что по некоторому начальному элементу

x_0 конструируется последовательность

$$x_n = Ax_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

доказывается, что эта последовательность сходится к некоторому элементу x^*, а затем устанавливается равенство $x^* = Ax^*$.

Пример (существование решения у уравнения Вольтерра). Пусть в нелинейном уравнении Вольтерра

$$x(t) = \int_0^t K[t, s, x(s)]\, ds$$

функции $K(t, s, x)$ и $K'_x(t, s, x)$ непрерывны по совокупности переменных $t, s \geqslant 0, -\infty < x < \infty$, и пусть

$$|K(t, s, x)| \leqslant \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — неубывающая функция. Если дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dt} = \varphi(|u|)$$

имеет на отрезке $[0, \omega]$ решение, удовлетворяющее условию $u(0) = 0$, то и уравнение Вольтерра имеет решение $x^*(t)$, определенное на $[0, \omega]$. Если положить $x_0(t) \equiv 0$, то последовательные приближения

$$x_n(t) = \int_0^t K[t, s, x_{n-1}(s)]\, ds \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

будут равномерно на $[0, \omega]$ сходиться к некоторой функции $x^*(t)$, являющейся решением уравнения Вольтерра. Это вытекает из того, что все $x_n(t)$ не выходят из области $-u(t) \leqslant x(t) \leqslant u(t)$ и удовлетворяют соотношению

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leqslant \frac{M}{L} \frac{(Lt)^n}{n!} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где M и L — такие постоянные, что

$$|K(t, s, 0)| \leqslant M \quad (0 \leqslant t, s \leqslant \omega)$$

и

$$|K(t, s, x_1) - K(t, s, x_2)| \leqslant L |x_1 - x_2| \quad (0 \leqslant t, s \leqslant \omega,$$
$$-u(s) \leqslant x_1, x_2 \leqslant u(s)).$$

2. Принцип сжатых отображений. В большинстве случаев применимость метода последовательных приближений сводится к проверке условий следующего общего принципа.

Принцип сжатых отображений. *Пусть T — замкнутое множество банахова пространства E. Пусть оператор A преобразует T в себя и является оператором сжатия, т. е. удовлетворяет условию Липшица*

$$\| Ax_1 - Ax_2 \| \leqslant q \| x_1 - x_2 \| \qquad (x_1, x_2 \in T)$$

с постоянной $q < 1$. Тогда уравнение $x = Ax$ имеет на T единственное решение x^*, которое является пределом последовательных приближений $x_n = Ax_{n-1}$ при любом начальном приближении $x_0 \in T$.

В условиях этого принципа роль T обычно играет либо все пространство E, либо некоторый шар $S(\theta, r)$. В некоторых случаях множество T приходится конструировать специальным образом.

Пример. Пусть в интегральном уравнении

$$x(t) = \int_0^1 K[t, s, x(s)]\, ds + f(t)$$

функции $K(t, s, x)$ и $f(t)$ непрерывны и $K(t, s, x)$ удовлетворяет по переменной x условию Липшица с константой $q < 1$.

Это интегральное уравнение можно рассматривать как операторное уравнение в пространстве C непрерывных на $[0, 1]$ функций. Оператор, определенный правой частью уравнения, удовлетворяет условию Липшица с константой $q < 1$. Поэтому в силу принципа сжатых отображений интегральное уравнение имеет непрерывное решение, которое является пределом последовательных приближений

$$x_n(t) = \int_0^1 K[t, s, x_{n-1}(s)]\, ds + f(t) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Иногда удобно пользоваться следствием из принципа сжатых отображений: *пусть оператор B также преобразует замкнутое множество T пространства E в себя и коммутирует с оператором A, удовлетворяющим условиям принципа сжатых отображений, т. е.*

$$BAx = ABx \qquad (x \in T).$$

Тогда неподвижная точка оператора A является неподвижной точкой (возможно неединственной) оператора B.

В частности, если некоторая итерация B^n оператора B удовлетворяет на множестве T условиям принципа сжатых отображений, то неподвижная точка x^* оператора B^n является неподвижной точкой и оператора B. В этом случае x^* является единственной неподвижной точкой оператора B.

Следует подчеркнуть, что принципом сжатых отображений не исчерпываются все случаи, когда решение нелинейного уравнения может быть получено как предел последовательных приближений.

3. Единственность решения. В условиях принципа сжатых отображений решение уравнения $x=Ax$ в T единственно. Однако из единственности решения в T не следует единственности решения вообще. Например, уравнение

$$x(t)=\int_0^1 x^2(t)\,dt$$

в шаре $\|x\|\leqslant\frac{1}{4}$ пространства C удовлетворяет условиям принципа сжатых отображений и имеет в нем единственное решение $x_0(t)\equiv 0$; однако это уравнение имеет второе непрерывное решение $x_1(t)\equiv 1$.

Следует еще иметь в виду, что из единственности решения некоторого операторного уравнения в банаховом пространстве E не следует единственности решения этого уравнения, рассматриваемого в более широком пространстве. Существуют примеры линейных интегральных уравнений Вольтерра, которые, кроме единственных непрерывных решений, имеют и несуммируемые решения.

4. Уравнения с вполне непрерывными операторами. Принцип Шаудера. Принцип сжатых отображений налагает на непрерывный оператор жесткое ограничение строгого сжатия. Если рассматривать вполне непрерывные операторы, то это условие можно значительно ослабить.

Принцип Шаудера. *Пусть оператор A вполне непрерывен и преобразует в себя ограниченное замкнутое выпуклое множество T. Тогда уравнение $x=Ax$ имеет* *в T по крайней мере одно решение (единственность решения не гарантируется).*

Если множество T компактно, то достаточно, чтобы оператор A был непрерывным.

При применении принципа Шаудера к изучению конкретных уравнений в первую очередь приходится строить пространство E, в котором оператор A вполне непрерывен. За выпуклое множество T обычно принимают некоторый шар пространства E. При этом радиус и центр этого шара нужно подобрать так, чтобы оператор A отображал этот шар в себя.

Пусть, например, вполне непрерывный оператор A обладает свойством

$$\|Ax\| \leqslant a + b\|x\|^{\alpha} \qquad (x \in E,\ \alpha,\ a,\ b > 0).$$

Если существует число $r > 0$, удовлетворяющее условию

$$a + br^{\alpha} \leqslant r,$$

то к оператору A в шаре $S(0, r)$ применим принцип Шаудера. Такое число r всегда существует при $\alpha < 1$ и при $\alpha = 1$ и $b < 1$. Если $\alpha > 1$, то r существует при условии, что

$$\min_{0 \leqslant s < \infty} (bs^{\alpha} - s) \leqslant -a.$$

Принцип Шаудера утверждает лишь существование решения и не дает метода для его нахождения. В случае, когда оператор A линейный, можно указать способ нахождения решений. Начиная с некоторого $x_0 \in T$, строят последовательные приближения $x_n = Ax_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. В условиях принципа Шаудера последовательность элементов

$$z_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n$$

компактна и все ее предельные точки являются решениями уравнения $x = Ax$.

Можно сформулировать утверждение, частными случаями которого являются как принцип Шаудера, так и принцип сжатых отображений.

Комбинированный принцип. *Пусть определенный на ограниченном замкнутом выпуклом множестве T*

оператор допускает представление $A = A_1 + A_2$, *где* A_1 *вполне непрерывен, а* A_2 *удовлетворяет условию Липшица с постоянной* $q < 1$. *Если выполнено условие*

$$A_1 x + A_1 y \in T \qquad (x, y \in T),$$

то уравнение $x = Ax$ *имеет на* T *по крайней мере одно решение.*

Принцип Шаудера доказывается топологическими методами. Эти же методы (см. п. 5) позволяют его усилить.

Усиленный принцип Шаудера. *Если вполне непрерывный оператор* A *на границе* Γ *замкнутого выпуклого множества* T, *содержащего* θ *в качестве внутренней точки, не имеет собственных векторов с собственным числом, бо́льшим* 1, *то в* T *существует решение уравнения* $x = Ax$.

Таким образом, можно не требовать, чтобы граница области Γ преобразовывалась оператором A снова в T. Достаточно, чтобы на ней только не было векторов, которые оператор A «растягивает» ($Ax = \varrho x$, $\varrho > 1$). Последнее условие часто проверяется значительно легче. Если, например, для каждой точки x_0 границы Γ существует такой линейный функционал $f_0(x)$, что $f_0(x_0) > 0$ и $f_0(Ax_0) \leqslant f_0(x_0)$, то условие усиленного принципа Шаудера выполнено. В частности, если вполне непрерывный оператор A определен на шаре $S(\theta, r)$ гильбертова пространства H и обладает тем свойством, что

$$(Ax, x) \leqslant (x, x) \qquad (\|x\| = r),$$

то для него справедлив усиленный принцип Шаудера.

5. Использование теории вполне непрерывных векторных полей. Пусть на границе Γ шара S банахова пространства E задан вполне непрерывный оператор A. Совокупность элементов вида $x - Ax$ ($x \in \Gamma$) называется *вполне непрерывным векторным полем* на Γ. Решение уравнения $x = Ax$ ($x \in \Gamma$) называется *нулем поля.*

Каждому вполне непрерывному векторному полю $x - Ax$ без нулей на Γ ставится в соответствие некоторое целое число $\gamma(\Gamma)$, называемое *вращением* векторного поля (см. [23]). Вращение может быть положительным, отрицательным или нулевым.

Принцип ненулевого вращения. *Если A — вполне непрерывный оператор на шаре S и вращение векторного поля $x - Ax$ на границе Γ шара S отлично от нуля, то в S существует решение уравнения $x = Ax$.*

Принцип Шаудера и усиленный принцип Шаудера являются частными случаями принципа нулевого вращения, так как в условиях этих принципов вращение равно 1.

Два векторных поля $x - A_0x$ и $x - A_1x$ называются *гомотопными* на Γ, если существует такой вполне непрерывный по совокупности переменных оператор $A(x; \alpha)$ $(x \in \Gamma, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$, что

$$A(x; 0) \equiv A_0x, \qquad A(x; 1) \equiv A_1x \qquad (x \in \Gamma)$$

и

$$A(x; \alpha) \neq x \qquad (x \in \Gamma, \ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1).$$

Непрерывный по обеим переменным оператор $A(x; \alpha)$ $(x \in \Gamma, \ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ будет, в частности, вполне непрерывным, если он вполне непрерывен при каждом фиксированном α и непрерывен по α равномерно относительно $x \in \Gamma$.

Вращения гомотопных вполне непрерывных векторных полей одинаковы. Этот факт позволяет применить следующий метод доказательства существования решения уравнения $x = Ax$ с вполне непрерывным оператором A. Вводится параметр λ таким образом, что оператор $A(x; \lambda)$ вполне непрерывен, $A(x; 1) \equiv Ax$ и $A(x; \lambda) \neq x$ $(x \in \Gamma)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Если теперь известно, что вращение векторного поля $x - A(x; 0)$ на Γ отлично от нуля (например, если $A(x; 0)$ удовлетворяет условиям принципа Шаудера), то из равенства вращений полей $x - A(x; 0)$ и $x - Ax$ немедленно вытекает, что исходное уравнение $x = Ax$ имеет на S хотя бы одно решение. Этот метод доказательства существования решений называют *методом Лере — Шаудера.*

Вычисление вращения векторного поля производится методами комбинаторной топологии. Для некоторых классов векторных полей известны свойства вращения. Например, если на сфере $\|x\| = r$

$$\frac{x - Ax}{\|x - Ax\|} \neq \frac{-x - A(-x)}{\|-x - A(-x)\|}$$

(в симметричных точках сферы векторы поля не направлены одинаково), то вращение поля отлично от нуля (более того, нечетно).

Пусть $Ax_0 = x_0$ и в некоторой окрестности точки x_0 уравнение $x = Ax$ не имеет отличных от x_0 решений. Тогда векторное поле $x - Ax$ на всех сферах $\|x - x_0\| = r$ достаточно малого радиуса r имеет одинаковое вращение. Это общее вращение $\gamma(x_0)$ называют *индексом неподвижной точки* x_0 оператора A.

Если в точке x_0 оператор A дифференцируем, причем линейный оператор $A'(x_0)$ не имеет единицу собственным значением, то

$$\gamma(x_0) = (-1)^{\beta},$$

где β — сумма кратностей собственных значений оператора $A'(x_0)$, больших чем 1.

Под *кратностью собственного значения* линейного ограниченного оператора B понимают размерность соответствующего собственного подпространства. Кратность каждого собственного числа вполне непрерывного оператора конечна.

Если единица является собственным значением оператора $A'(x_0)$, то вычисление индекса $\gamma(x_0)$ усложняется; это вычисление использует производные высших порядков. Здесь получены лишь частные результаты.

Пусть в шаре S уравнение $x = Ax$ имеет конечное число решений $x_1, \ldots, x_k$. Тогда вращение $\gamma(\Gamma)$ поля $x - Ax$ на Γ связано с индексами точек $x_1, \ldots, x_k$ равенством

$$\gamma(\Gamma) = \gamma(x_1) + \ldots + \gamma(x_k).$$

Это свойство вращения может быть применено для доказательства теорем единственности. Если вращение $\gamma(\Gamma)$ векторного поля $x - Ax$ на Γ по модулю равно 1 и если индекс каждого возможного решения имеет один и тот же знак, то решение в силу предыдущего единственно.

Наоборот, если известно вращение $\gamma(\Gamma)$ и индекс $\gamma(x_0)$ известного решения x_0 оказывается отличным от $\gamma(\Gamma)$, то уравнение $x - Ax$ имеет на S кроме x_0 по крайней мере еще одно решение.

Пример (существование второго решения у уравнения Урысона). Пусть оператор A, определенный правой частью уравнения Урысона

$$x(t) = \int_0^1 K[t, s, x(s)]\, ds,$$

вполне непрерывен в L_p и дифференцируем в нуле этого пространства, причем

$$A'(\theta) h(t) = \int_0^1 K'_x(t, s, 0) h(s) \, ds.$$

Если оператор A удовлетворяет на шаре $S(\theta, r)$ условиям принципа Шаудера, то вращение $\gamma(\Gamma)$ поля $x - Ax$ на сфере $\|x\| = r$ равно 1. Пусть $K(t, s, 0) \equiv 0$. Тогда уравнение имеет нулевое решение. Если единица не является собственным значением линейного вполне непрерывного оператора $A'(\theta)$ и сумма кратностей его собственных значений, больших чем 1, нечетна, то $\gamma(\theta) = -1$. Таким образом, $\gamma(\Gamma) \neq \gamma(\theta)$ и уравнение Урысона имеет по крайней мере одно ненулевое решение в $S(\theta, r)$.

6. Вариационный метод. Вариационный метод доказательства теорем существования решений заключается в том, что решение операторного уравнения конструируется, как экстремальная точка некоторого функционала.

Функционал $F(x)$, определенный на банаховом пространстве E, называется *слабо непрерывным*, если он непрерывен в ослабленной топологии $\sigma(E, E')$ в пространстве E (см. гл. I, § 4, п. 3). Если пространство E рефлексивно, то в силу компактности любой сферы E в ослабленной топологии слабо непрерывный функционал принимает на каждой сфере наименьшее и наибольшее значения.

Градиент гладкого слабо непрерывного функционала в гильбертовом пространстве является вполне непрерывным оператором.

Пусть A — потенциальный оператор в гильбертовом пространстве H.

Вариационный принцип. *Если оператор A является градиентом слабо непрерывного функционала $F(x)$ и*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \left[\frac{1}{2}(x, x) - F(x) \right] = \infty,$$

то в H существует точка x_0, в которой функционал $\frac{1}{2}(x, x) - F(x)$ принимает свое наименьшее значение и которая является решением уравнения $x = Ax$.

7. Преобразоваиие уравиеиий. При изучении операторных уравнений часто приходится преобразовывать уравнения к виду, удобному для применения того или иного принципа, из которого следует существование решения, или для применения некоторого приближенного метода нахождения решения.

Основные виды преобразований операторных уравнений такие же, как и для обычных уравнений: а) добавление к обеим частям уравнения одного и того же элемента; б) применение к обеим частям уравнения одного и того же оператора («умножение на оператор»); в) замена переменного.

При первом преобразовании уравнение переходит в эквивалентное. Если к обеим частям уравнения применяется линейный ограниченный оператор B, то всякое решение исходного уравнения будет решением и нового уравнения. Обратное будет верно, если существует обратный оператор B^{-1}. Таким образом, переход к новому уравнению при преобразовании б) может добавлять лишние решения, если нуль является собственным значением линейного оператора B.

Если в уравнении производится замена переменного вида $x = Cy$, где C — некоторый оператор, и находятся решения y^* нового уравнения, то для получения решения x^* исходного уравнения нужно проверить, что y^* находится в области определения оператора C, и тогда $x^* = Cy^*$. Кроме того, при преобразовании в) часть решений может теряться. Это имеет место, если имеются решения x^*, не представимые в виде Cy. Преобразование в) бывает чрезвычайно полезным тем, что оператор C может действовать в пространство E, в котором ищется решение x^*, из другого пространства E_1. Поэтому новое уравнение (относительно y) естественно рассматривать в пространстве E_1. Иногда оказывается, что в E_1 уравнение получается более простым.

При преобразовании уравнений в бесконечномерных пространствах приходится сталкиваться с такой специфической ситуацией: преобразованное уравнение содержит операторы, которые не замкнуты, но допускают замыкание. Естественно при этом изучать уравнение с замкнутыми операторами. При этом могут появляться новые решения, которые обычно называют *обобщенными решениями*. Основной трудностью часто является доказательство того, что обобщенное решение принадлежит области определения операторов, входящих в уравнение, до их замыкания и, следовательно, является истинным решением.

8. Примеры. Расщепление операторов.

1. Подготовка уравнения к применению метода последовательных приближений. Пусть в уравнении

$$Bx = f$$

оператор B линеен, ограничен и имеет спектр, лежащий внутри правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$ комплексной плоскости λ. После умножения обеих частей уравнения на число k и прибавления к обеим частям элемента x оно приводится к виду

$$x = (I - kB)\,x + kf.$$

При достаточно малом k оператор $I - kB$ будет иметь спектр, лежащий внутри единичного круга, и следовательно, для отыскания решения нового уравнения (эквивалентного старому) применим метод последовательных приближений.

Аналогичное преобразование уравнения иногда удобно применять, заменяя умножение на число k умножением на подходящим образом подобранный оператор K.

2. Уравнения, близкие к линейным. Уравнение $x = Ax$ с вполне непрерывным оператором A преобразуется к виду $x - Bx = Ax - Bx$, где B — линейный вполне непрерывный оператор. Если число 1 не является собственным числом оператора B, то это уравнение эквивалентно уравнению

$$x = (I - B)^{-1}\,(A - B)\,x.$$

Если на сфере $\|x\| = r$ оператор $(I - B)^{-1}(A - B)$ не имеет собственных векторов, соответствующих собственным числам, большим единицы, то в силу усиленного принципа Шаудера полученное уравнение имеет хотя бы одно решение в шаре $\|x\| \leqslant r$. Таких собственных векторов заведомо не будет, если оператор A близок к оператору B в том смысле, что

$$\|Ax - Bx\| \leqslant \|x - Bx\|.$$

3. Расщепление операторов. Пусть в уравнении

$$x = BCx$$

оператор B является линейным и допускает «расщепление» на два множителя: $B = B_1 B_2$, где B_1 и B_2 — линейные операторы.

Всякое решение уравнения представимо в виде $x = B_1 y$. Эта замена сводит уравнение к эквивалентному

$$y = B_2 C B_1 y.$$

Часто удобным является специальный вид расщепления оператора: $B = B^{\alpha} B^{1-\alpha}$, где B^{α} и $B^{1-\alpha}$ — дробные степени оператора B. В связи с этим в последние годы усиленно развивалась теория дробных степеней линейных операторов (см. гл. III, § 3, п. 4).

Простейшим примером уравнения рассматриваемого типа является уравнение Гаммерштейна

$$x(t) = \int_0^1 K(t, s) f[s, x(s)]\, ds.$$

Пусть ядро $K(t, s)$ симметрично, ограничено и положительно определено. Оно порождает в гильбертовом пространстве $L_2[0, 1]$ вполне непрерывный положительно определенный оператор B. Если $\{e_i(t)\}$ — полная ортонормированная система собственных функций оператора B, а λ_i — соответствующие собственные числа, то оператор $B^{1/2}$ определяется формулой

$$B^{\frac{1}{2}} x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\, c_i e_i(t),$$

где c_i — коэффициенты Фурье функции $x(t)$:

$$c_i = \int_0^1 e_i(s) x(s)\, ds.$$

Заменой $x = B^{\frac{1}{2}} y$ уравнение Гаммерштейна сводится к виду

$$y = B^{\frac{1}{2}} f B^{\frac{1}{2}} y.$$

Можно показать, что оператор $B^{\frac{1}{2}}$ действует из пространства $L_2[0, 1]$ в пространство $M[0, 1]$. Поэтому, если функция $f(t, x)$ непрерывна, то оператор $fB^{\frac{1}{2}}y$ будет непрерывным оператором, действующим из $L_2[0, 1]$ в $M[0, 1]$. Оператор $B^{\frac{1}{2}}fB^{\frac{1}{2}}$ в этом случае вполне непрерывен в $L_2[0, 1]$.

Для оператора $B^{\frac{1}{2}}fB^{\frac{1}{2}}$ в L_2 удобно проверять условия усиленного принципа Шаудера в форме, указанной в конце п. 5. Действительно,

$$(B^{\frac{1}{2}}fB^{\frac{1}{2}}y, y) = (fB^{\frac{1}{2}}y, B^{\frac{1}{2}}y).$$

Если функция $f(t, x)$ не слишком быстро растет по x, то

$$(fB^{\frac{1}{2}}y, B^{\frac{1}{2}}y) < (y, y)$$

на сфере достаточно большого радиуса r: $\|y\| = r$. Поэтому уравнение $y = B^{\frac{1}{2}}fB^{\frac{1}{2}}y$ в силу указанного принципа имеет хотя бы одно решение y^* внутри шара $\|y\| \leqslant r$. Тогда $x^* = B^{\frac{1}{2}}y^*$ будет решением уравнения Гаммерштейна. При этом $y^* \in L_2[0, 1]$ и, следовательно, $x^* \in M[0, 1]$.

Приведенное доказательство существования ограниченного решения у уравнения Гаммерштейна удается, например, провести, если функция $f(t, x)$ удовлетворяет неравенству

$$xf(t, x) \leqslant ax^2 + b(t)|x|^{2-\gamma} + c(t),$$

где $0 < \gamma < 2$, $b(t) \in L_{\frac{2}{\gamma}}[0, 1]$, $c(t) \in L_1[0, 1]$ и $a < \frac{1}{\lambda_1}$.

В рассмотренном примере оператор $B^{\frac{1}{2}}$ действовал из L_2 в M. В более общих случаях он действует из L_2 в $L_p (p > 2)$ и вполне непрерывен. Кроме того, он может быть естественно расширен до оператора $\left(B^{\frac{1}{2}}\right)^*$, который действует из $L_{p'}$ в L_2 $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$. Если нелинейный оператор f действует из L_p в $L_{p'}$, то уравнение

$$y = \left(B^{\frac{1}{2}}\right)^* fB^{\frac{1}{2}}y$$

будет уравнением в L_2 с вполне непрерывным оператором и к нему применимы приведенные выше рассуждения. Если $y^* \in L_2$ будет решением этого уравнения, то $x^* = B^{\frac{1}{2}} y^* \in L_p$ и является решением уравнения

$$x = B^{\frac{1}{2}} \left(B^{\frac{1}{2}}\right)^* fx.$$

Оператор $B^{\frac{1}{2}} \left(B^{\frac{1}{2}}\right)^*$ является расширением оператора B, рассматриваемого первоначально на пространстве L_2. Поэтому решения последнего уравнения можно рассматривать как обобщенные решения исходного уравнения. В случае уравнения Гаммерштейна они оказываются истинными решениями.

§ 3. Качествеииые методы в теории ветвлеиия решеиий

В этом параграфе рассматривается уравнение

$$x = A(x, \mu),$$

где μ вещественно.

Всюду предполагается, что оператор A непрерывен по μ равномерно относительно элементов x из любого ограниченного множества.

Если на основании одного из принципов, изложенных в предыдущем параграфе, удается установить существование решения уравнения при $\mu = \mu_0$, то в большинстве случаев удается доказать существование решения и при близких значениях параметра μ, так как условия применимости соответствующего принципа не нарушаются при малых изменениях оператора $A(x, \mu_0)$. Для определения величины отрезка $[\mu_0 - a, \mu_0 + b]$, на котором сохраняются эти условия, нужно оценивать $\|A(x, \mu) - A(x, \mu_0)\|$, для чего часто требуются априорные оценки для решений соответствующих уравнений.

1. Продолжеиие решеиий, теорема о иеявиой фуикции. Если x_0 — решение уравнения $x = A(x, \mu_0)$, то естественно ожидать, что при значениях параметра μ, близких к μ_0, уравнение $x = A(x, \mu)$ будет иметь решение $x(\mu)$, близкое к x_0. В установлении этого факта важную роль играет общая теорема о неявной функции.

Пусть в уравнении

$$F(x, u) = 0$$

x — элемент банахова пространства E_1, u — элемент банахова пространства E_2, а $F(x, u)$ — оператор со значениями в банаховом пространстве E_3. Под решением этого уравнения понимается оператор $X(u)$, определенный на некотором множестве элементов $u \in E_2$ со значениями в E_1 и такой, что $F(X(u), u) \equiv 0$.

Имеет место аналог обычной теоремы существования неявной функции: *если $F(x_0, u_0) = 0$, оператор $F(x, u)$ непрерывен и непрерывно дифференцируем по Фреше по переменному x при $\|x - x_0\| \leqslant a$, $\|u - u_0\| \leqslant b$ и линейный оператор $F'_x(x_0, u_0)$ имеет ограниченный обратный, то в некоторой окрестности точки u_0 определено решение $X(u)$ уравнения $F(x, u) = 0$. Это решение единственно. Оператор $X(u)$ непрерывен.*

Если оператор $F(x, u)$ имеет производные Фреше по u определенного порядка, то оператор $X(u)$ имеет производные Фреше того же порядка.

При применении теоремы о неявной функции к уравнению $x = A(x, \mu)$ требование обратимости оператора $F'_x(x_0, u_0)$, естественно, заменяется требованием, чтобы единица не принадлежала спектру оператора $A'_x(x_0, \mu_0)$. При выполнении этого условия и непрерывности по (x, μ) оператора $A'_x(x, \mu)$ в окрестности точки (x_0, μ_0) существует единственное непрерывное решение $x(\mu)$ уравнения $x = A(x, \mu)$ такое, что $x(\mu_0) = x_0$.

2. Точки ветвления. Если в уравнении $x = A(x, \mu)$ оператор $A(x, \mu)$ при каждом μ вполне непрерывен, то к исследованию поведения решений при изменении μ можно применить топологические методы.

Пусть x_0 — изолированное решение уравнения $x = A(x, \mu_0)$, имеющее ненулевой индекс. На достаточно малой сфере S, окружающей точку x_0, вращение поля $x - A(x, \mu_0)$ будет отличным от нуля. Следовательно, при μ, близких к μ_0, и вращение поля $x - A(x, \mu)$ будет отличным на S от нуля. Из принципа ненулевого вращения следует, что внутри S имеется по крайней мере одно решение $x(\mu)$ уравнения $x = A(x, \mu)$. Уменьшая радиус сферы S, можно так выбирать решение $x(\mu)$, что

$$\lim_{\mu \to \mu_0} \|x(\mu) - x_0\| = 0.$$

В этом смысле можно говорить о непрерывности решения $x(\mu)$ в точке μ_0.

Пара (x_0, μ_0) называется ***точкой ветвления*** для уравнения $x = A(x, \mu)$, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое μ, что $|\mu - \mu_0| < \varepsilon$ и уравнение $x = A(x, \mu)$ имеет по крайней мере два решения, лежащие в ε-окрестности точки x_0.

Из рассуждений предыдущего пункта вытекает, что пара (x_0, μ_0) не является точкой ветвления, если в окрестности точки (x_0, μ_0) существует оператор $A'_x(x, \mu)$, непрерывный по (x, μ), и единица не является точкой спектра оператора $A'_x(x_0, \mu_0)$. Если же предполагать только существование оператора $A'_x(x_0, \mu_0)$, не имеющего единицу точкой спектра, и не предполагать существования оператора $A'_x(x, \mu)$ в окрестности точки (x_0, μ_0), то пара (x_0, μ_0) может оказаться точкой ветвления.

Пусть внутри сферы S при каждом μ, близком к μ_0 и отличном от него, уравнение $x = A(x, \mu)$ имеет только конечное число решений, причем в точках-решениях существует оператор $A'_x(x, \mu)$ и единица не является его собственным значением. Число таких решений тогда отличается от вращения поля $x - A(x, \mu)$ на сфере S на четное число (индекс каждого решения ± 1, сумма индексов равна вращению поля). Поскольку вращение поля $x - A(x, \mu)$ на S при изменении μ вблизи μ_0 не изменяется, то число решений уравнения $x = A(x, \mu)$ при переходе μ через μ_0 может измениться лишь на четное число. Это утверждение называется ***принципом сохранения четности числа решений.***

Если индекс решения x_0 равен нулю, то при μ, близких к μ_0, решение $x(\mu)$ уравнения $x = A(x, \mu)$ в окрестности точки x_0 может вообще не существовать. Решения могут «втекать» в x_0 при $\mu \to \mu_0 - 0$ и не существовать при $\mu > \mu_0$; тогда пара (x_0, μ_0) называется ***точкой прекращения решений.*** Решения могут не существовать при $\mu < \mu_0$ и «вытекать» из точки x_0 при $\mu \to \mu_0 + 0$; тогда пара (x_0, μ_0) называется ***точкой рождения решений.***

3. Точки бифуркации, принцип линеаризации. Близким к точке ветвления является понятие точки бифуркации.

Допустим, что $A(\theta, \mu) = \theta$. Тогда уравнение $x = A(x, \mu)$ имеет нулевое решение $x = \theta$ при всех значениях параметра μ.

Число μ_0 называется ***точкой бифуркации*** для этого уравнения (или для операторов $A(x, \mu)$), если любому $\varepsilon > 0$ соответствует такое значение параметра μ из промежутка $\|\mu - \mu_0| < \varepsilon$, при котором уравнение имеет по крайней мере одно ненулевое решение $x(\mu)$, удовлетворяющее условию $|x(\mu)\| < \varepsilon$. В отличие от определения точки ветвления в определении точки бифуркации предполагается априори известным одно семейство решений, определенное при всех значениях параметра — речь идет об «ответвлении» решений от заданного семейства. В определении точки бифуркации не говорится о том, при каких значениях параметра уравнение имеет малые ненулевые решения. Эти значения могут образовывать дискретное множество или даже совпадать с μ_0. Общность понятия точки бифуркации позволяет получить общие простые теоремы о методах отыскания этих точек. В то же время понятие точки бифуркации достаточно полно описывает появление ненулевых решений.

Для линейного уравнения $x = \mu Bx$ с линейным вполне непрерывным оператором B точки бифуркации совпадают с ***характеристическими значениями*** оператора B (значения, обратные собственному числу).

Если оператор $A(x, \mu)$ непрерывно дифференцируем по Фреше, то в силу теоремы о неявной функции его точками бифуркации могут быть лишь те значения μ, при которых единица является точкой спектра оператора $A'_x(\theta, \mu)$. Пусть $A'_x(\theta, \mu) = \mu B$, где B — вполне непрерывный линейный оператор, не зависящий от μ. Если единица является собственным значением оператора μB, то μ является характеристическим числом оператора B. Итак, в этом случае точки бифуркации являются характеристическими значениями оператора B. Возникает вопрос о том, ***каждое ли характеристическое значение оператора B является точкой бифуркации?*** В общем случае, как показывают примеры, ответ отрицателен.

Принципом линеаризации называют принцип, согласно которому отыскание точек бифуркации сводится к определению характеристических значений линейного оператора B. Обоснованием этого принципа служит следующее утверждение: *если вполне непрерывный оператор $A(x, \mu)$ $(A(\theta, \mu) = \theta)$ имеет в точке θ производную Фреше $A'_x(\theta, \mu) = \mu B$, то*

***каждое нечетнократное** (**в частности, простое**) **характеристическое значение оператора B является точкой бифуркации оператора** $A(x, \mu)$.*

Если характеристическое значение оператора B имеет четную кратность, то требуется дополнительный анализ, использующий не только главную линейную часть μB оператора $A(x, \mu)$. Пусть вполне непрерывный оператор $A(x, \mu)$ допускает представление

$$A(x, \mu) = \mu Bx + C(x, \mu) + D(x, \mu),$$

где B, как и выше, линейный вполне непрерывный оператор, оператор $C(x, \mu)$ состоит из членов k-го порядка малости, $k > 1$ — целое число, то есть

$$C(\alpha x, \mu) = \alpha^k C(x, \mu)$$

и

$$\|C(x_1, \mu) - C(x_2, \mu)\| \leqslant q(\varrho)\|x_1 - x_2\|$$
$$(\|x_1\| \leqslant \varrho, \ \|x_2\| \leqslant \varrho, \ q(\varrho) = O(\varrho^{k-1}));$$

оператор $D(x, \mu)$ состоит из членов более высокого порядка малости

$$\|D(x, \mu)\| \leqslant L\|x\|^{k+1}.$$

Пусть μ_0 является характеристическим значением оператора B четной кратности β, пусть элементы $e_1, \ldots, e_\beta$ образуют базис в собственном подпространстве оператора B, соответствующем собственному числу $\frac{1}{\mu_0}$, а элементы $g_1, \ldots, g_\beta$ образуют базис в собственном подпространстве оператора B^*, соответствующем этому же собственному числу (μ_0 вещественно).

Важную роль играет векторное поле F в β-мерном векторном пространстве, определенное равенством

$$F\{\xi_1, \ldots, \xi_\beta\} = \{\eta_1, \ldots, \eta_\beta\},$$

где

$$\eta_i = -(C(\xi_1 e_1 + \ldots + \xi_\beta e_\beta, \mu_0), g_i) \qquad (i = 1, \ldots, \beta).$$

Пусть это поле не вырождено (то есть обращается в нуль лишь в точке $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_\beta = 0$) и его вращение на единичной сфере равно γ_C. Имеет место следующее утверждение:

Если $\gamma_C \neq 1$, то μ_0 является точкой бифуркации оператора $A(x, \mu)$.

Для приложений этого утверждения нужно уметь конструировать поле F, уметь доказывать, что это поле не вырождено, и уметь вычислять вращение γ_C. При вычислении вращения полезно знать, что вращение четного ($F(x) = F(-x)$) поля есть четное число.

Пусть, например, $k = 2$ и μ_0 является характеристическим значением оператора B второй кратности ($\beta = 2$). В этом случае поле F будет иметь две компоненты η_1 и η_2, каждая из которых будет квадратичной формой относительно ξ_1 и ξ_2:

$$\eta_1 = a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2,$$
$$\eta_2 = b_{11}\xi_1^2 + 2b_{12}\xi_1\xi_2 + b_{22}\xi_2^2.$$

Если одна из этих форм положительно или отрицательно определена, то поле F не вырождено и его вращение равно нулю. Если ни одна из форм не знакопостоянна, то для невырожденности поля достаточно, чтобы прямые $\xi_1 = a\xi_2$, на которых аннулируется одна из форм, состояли из точек, на которых вторая форма принимает ненулевые значения. Угловые коэффициенты a_1 и a_2 прямых, на которых аннулируется первая квадратичная форма, определяются из квадратного уравнения $a_{11} + 2a_{12}a + a_{22}a^2 = 0$.

Пример (точки бифуркации уравнения Гаммерштейна). Пусть в уравнении

$$x(t) = \mu \int_0^1 K(t, s) f[x(s)]\, ds$$

с ограниченным симметричным ядром $K(t, s)$ функция $f(x)$ достаточное число раз дифференцируема, $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$. Линеаризация этого уравнения приводит к линейному интегральному уравнению с ядром $K(t, s)$.

Если характеристическое значение μ_0 ядра $K(t, s)$ имеет нечетную кратность, то оно будет точкой бифуркации для исходного уравнения.

Пусть μ_0 имеет кратность 2 и $e_1(t)$, $e_2(t)$ — соответствующие ему собственные функции. Если $f''(0) \neq 0$, то оператор C будет иметь вид

$$C(x(t), \mu) = \mu \int_0^1 K(t, s)\, x^2(s)\, ds.$$

Поэтому компоненты векторного поля F определятся равенствами

$$\eta_1 = \xi_1^2 \int_0^1 e_1^3(t)\,dt + 2\xi_1\xi_2 \int_0^1 e_1^2(t)\,e_2(t)\,dt + \xi_2^2 \int_0^1 e_1(t)\,e_2^2(t)\,dt,$$

$$\eta_2 = \xi_1^2 \int_0^1 e_1^2(t)\,e_2(t)\,dt + 2\xi_1\xi_2 \int_0^1 e_1(t)\,e_2^2(t)\,dt + \xi_2^2 \int_0^1 e_2^3(t)\,dt.$$

Если, например, $e_1(t) = 1$, $e_2(t) = \sqrt{2}\cos 2\pi t$, то

$$\eta_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2, \qquad \eta_2 = 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2.$$

Первая из квадратичных форм положительно определена, вращение поля F равно нулю и, следовательно, μ_0 является точкой бифуркации для уравнения Гаммерштейна.

Интересным является вопрос о том, при каких значениях параметра μ, бóльших или меньших μ_0, уравнение $x = A(x; \mu)$ имеет малые ненулевые решения.

Пусть μ_0 — простое характеристическое значение линеаризованного уравнения $x = \mu Bx$, e — соответствующий собственный вектор, g — собственный вектор сопряженного оператора, причем $(e, g) = 1$. Векторное поле F в этом случае определяется числом

$$\varkappa = -(C(e, \mu_0), g).$$

Имеют место следующие утверждения:

1) *Если порядок k малости оператора C — четное число, то уравнение $x = A(x, \mu)$ имеет малые ненулевые решения при $\mu < \mu_0$ и при $\mu > \mu_0$. Если оператор $A(x, \mu)$ достаточно гладкий, то при каждом μ (вблизи μ_0) ненулевое решение единственно.*

2) *Если k нечетно, то при $\varkappa < 0$ малые ненулевые решения существуют при $\mu > \mu_0$ и отсутствуют при $\mu < \mu_0$, если $\varkappa > 0$, то малые ненулевые решения существуют при $\mu < \mu_0$ и отсутствуют при $\mu > \mu_0$. При соответствующих значениях μ существует по два ненулевых решения.*

4. Примеры из механики.

а) Задача Эйлера об устойчивости при изгибе стержня. Прогиб $y(\xi)$ стержня единичной длины с переменной жесткостью $\varrho(\xi)=\frac{1}{EJ}$ под действием продольной силы μ определяется решением дифференциального уравнения

$$y''(\xi)+\mu\varrho(\xi)\,y(\xi)\sqrt{1-y'^2(\xi)}=0$$

при нулевых граничных условиях

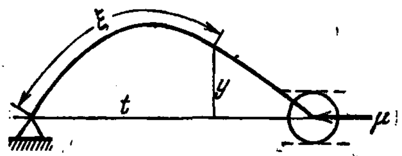
$$y(0)=y(1)=0$$

(см. рисунок).

Функция

$$K(\xi,\ \eta)=\begin{cases}(1-\eta)\,\xi, & \text{если } \xi\leqslant\eta,\\ (1-\xi)\,\eta, & \text{если } \xi\geqslant\eta,\end{cases}$$

является функцией Грина оператора y'' при нулевых граничных условиях.



Дифференциальное уравнение изгиба стержня сводится к интегральному уравнению заменой

$$y''(\xi)=-\varphi(\xi).$$

Тогда

$$y(\xi)=\int_0^1 K(\xi,\ \eta)\,\varphi(\eta)\,d\eta$$

и уравнение для $\varphi(\xi)$ принимает вид

$$\varphi(\xi)=\mu\varrho(\xi)\int_0^1 K(\xi,\ \eta)\,\varphi(\eta)\,d\eta\,\sqrt{1-\left[\int_0^1 K'_\xi(\xi,\ \eta)\,\varphi(\eta)\,d\eta\right]^2}.$$

Это уравнение имеет нулевое решение при всех значениях параметра μ. При некоторых нагрузках μ уравнение может иметь ненулевые решения, которыми определяются формы потери устойчивости. Нагрузку μ_0 называют ***критической нагрузкой Эйлера***, если при некоторых, близких к μ_0 нагрузках уравнение имеет малые ненулевые решения. Иначе говоря, критическая нагрузка Эйлера — это точка бифуркации для уравнения изгиба стержня.

Одной из важных задач теории упругости является отыскание критической нагрузки.

Полученное интегральное уравнение можно рассматривать как операторное уравнение вида $x=A(x, \mu)$ с вполне непрерывным оператором в пространстве C. Линеаризация приводит к уравнению

$$\varphi(\xi)=\mu\varrho(\xi)\int_0^1 K(\xi, \eta)\varphi(\eta)\,d\eta.$$

Если $e(\xi)$ — ненулевое решение этого уравнения при $\mu=\mu_0$, то функция

$$y(\xi)=\int_0^1 K(\xi, \eta)\,e(\eta)\,d\eta$$

будет решением уравнения

$$y''(\xi)+\mu_0\varrho(\xi)\,y(\xi)=0,$$

удовлетворяющим ненулевым граничным условиям. Отсюда вытекает, что каждое характеристическое значение линеаризованного уравнения является простым и, следовательно, является точкой бифуркации. Соответствующие значения μ дают критические нагрузки.

Оператор C для рассматриваемого уравнения имеет вид

$$C(x(\xi), \mu)=-\frac{\mu\varrho(\xi)}{2}\int_0^1 K(\xi, \eta)\,x(\eta)\,d\eta\left[\int_0^1 K'_\xi(\xi, \eta)\,x(\eta)\,d\eta\right]^2$$

и, следовательно, имеет третий порядок малости ($k=3$). Здесь

$$\varkappa=-\frac{1}{2}\int_0^1 e^2(\xi)\left[\int_0^1 K'_\xi(\xi, \eta)\,e(\eta)\,d\eta\right]^2 d\xi<0,$$

поэтому ненулевые решения появляются при $\mu>\mu_0$. Это вполне соответствует физическому смыслу задачи: потеря устойчивости происходит тогда, когда нагрузка превосходит критическое значение.

Иногда в литературе встречается другое уравнение для изгиба стержня:

$$y''(t)+\mu\varrho(t)\,y(t)\,[1+y'^2(t)]^{3/2}=0$$

при граничных условиях

$$y(0)=y(1)=0.$$

Оно соответствует тому, что кривизна выражена не как функция длины дуги ξ, а как функция координаты t. При этом приближенно считается, что $\varrho(\xi)=\varrho(t)$, и в граничных условиях не учитывается изменение координаты незакрепленного конца стержня, представляющее собою величину третьего порядка малости по сравнению с прогибом стержня. Однако эта величина третьего порядка сказывается на знаке $\varkappa$. В этом случае для $\varkappa$ получится выражение

$$\varkappa=\frac{3}{2}\int_0^1 e^2(t)\left[\int_0^1 K_t'(t, s)\, e(s)\, ds\right]^2 dt>0,$$

у соответствующего интегрального уравнения ненулевые решения появляются при $\mu<\mu_0$, что противоречит физическому смыслу задачи. Таким образом, пренебрежение в уравнениях величинами третьего порядка малости приводит к неправильному описанию задачи о формах потери устойчивости сжатого стержня.

б) Волны на поверхности идеальной несжимаемой тяжелой жидкости. Разыскание таких волн сведено А. И. Некрасовым к решению интегрального уравнения

$$x(t)=\mu\int_0^{2\pi}\frac{K(t, s)\sin x(s)}{1+\int_0^s \sin x(u)\, du}\, ds,$$

где μ — числовой параметр, а

$$K(t, s)=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt \sin ns}{n}.$$

Это уравнение можно рассматривать как операторное уравнение в пространстве C на отрезке $[0, 2\pi]$. При всех значениях μ оно имеет нулевое решение. Точки бифуркации этого уравнения соответствуют значениям параметров, при которых возникают волны.

Линеаризованное уравнение имеет вид

$$x(t)=\mu\int_0^{2\pi} K(t, s)\,x(s)\,ds,$$

его характеристическими значениями будут числа $\mu_n=3n$ с соответствующими собственными функциями $e_n(t)=\sin nt$. Все характеристические значения простые, поэтому они и только они будут точками бифуркации для уравнения Некрасова.

Оператор C имеет вид

$$C(x(t), \mu)=-\mu^2\int_0^{2\pi} K(t, s)\,x(s)\int_0^s x(\tau)\,d\tau\,ds.$$

При малых x он является величиной второго порядка малости ($k=2$), поэтому уравнение Некрасова имеет малые ненулевые решения и при $\mu<\mu_n$, и при $\mu>\mu_n$, где μ_n — любая точка бифуркации.

5. Уравнения с потенциальными операторами. Для уравнения

$$x=\mu Ax,$$

где A — вполне непрерывный оператор, являющийся градиентом слабо непрерывного функционала в гильбертовом пространстве, принцип линеаризации для отыскания точек бифуркации значительно усиливается.

Если $A(\theta)=\theta$, оператор A непрерывно дифференцируем и его производная $A'(\theta)=B$ является вполне непрерывным самосопряженным оператором, то каждое характеристическое значение оператора B, независимо от его кратности, является точкой бифуркации нелинейного уравнения $x=\mu Ax$.

В качестве примера можно снова рассмотреть уравнение Гаммерштейна с симметричным ограниченным положительно определенным ядром:

$$x(t)=\mu\int_0^1 K(t, s)\,f[s, x(s)]\,ds, \quad f(s, 0)\equiv 0, \quad f'(s, 0)\equiv 1.$$

Так же, как и в § 2, п. 7, его можно преобразовать к виду

$$y = \mu B^{\frac{1}{2}} f B^{\frac{1}{2}} y.$$

Оператор $B^{\frac{1}{2}} f B^{\frac{1}{2}}$ является градиентом функционала

$$\Phi(x) = \int_0^1 ds \int_0^{B^{\frac{1}{2}}x} f(s, u)\, du.$$

Если оператор f дифференцируем, то производная Фреше оператора $B^{\frac{1}{2}} f B^{\frac{1}{2}}$ в точке θ является линейным интегральным оператором B с ядром $K(t, s)$. Все характеристические значения этого оператора являются точками бифуркации для уравнения $y = \mu B^{\frac{1}{2}} f B^{\frac{1}{2}} y$. Обратная замена $B^{\frac{1}{2}} y = x$ показывает, что точки бифуркации последнего уравнения совпадают с точками бифуркации исходного уравнения Гаммерштейна.

6. Рождение больших решений. В п. 2 была описана общая схема изменения решений при изменении значений параметра. Эта схема относилась к тому случаю, когда рассматривались решения в некотором шаре. В более общем случае при изменении значений параметра нормы решений могут неограниченно возрастать. Может встретиться такой случай, когда решения с большими нормами возникают при значениях параметра, бóльших, чем некоторое критическое число. Здесь приводится одна теорема, описывающая появление решений с большими нормами.

Пусть оператор $A(x, \mu)$ асимптотически линеен, причем $A'_\infty(\infty, \mu) = \mu B$. Пусть μ_0 — нечетнократное характеристическое значение линейного вполне непрерывного оператора B.

Тогда при любых ε, $R > 0$ может быть указано такое μ, которое удовлетворяет неравенству $|\mu - \mu_0| < \varepsilon$ и при котором уравнение $x = A(x, \mu)$ имеет по крайней мере одно решение, норма которого больше чем R.

7. Уравнение разветвления. Предположим, что единица является собственным значением производной $A'_x(x_0, \mu_0)$

вполне непрерывного и непрерывно дифференцируемого оператора $A(x, \mu)$. Для простоты ограничимся случаем, когда инвариантное подпространство E_0, соответствующее этому собственному значению, состоит только из собственных векторов. Через E^0 обозначим дополнительное к E_0 инвариантное подпространство оператора $A'_x(x_0, \mu_0)$. Каждый элемент $x \in E$ представим в виде

$$x = u + v \qquad (u \in E_0, \ v \in E^0).$$

Пусть P и Q — операторы проектирования на E_0 и E^0, определенные равенствами $Px = u$, $Qx = v$.

Уравнение $x = A(x, \mu)$ можно переписать в виде системы

$$y = PA(x_0 + y + z, \ \mu) - Px_0,$$
$$z = QA(x_0 + y + z, \ \mu) - Qx_0,$$

где $y = P(x - x_0)$, $z = Q(x - x_0)$. Если y и $\mu - \mu_0$ достаточно малы, то второе уравнение имеет единственное малое решение $z = R(y, \mu)$. Поэтому вопрос о разрешимости и о построении решения уравнения $x = A(x, \mu)$ эквивалентен вопросу о разрешимости уравнения

$$y = PA(x_0 + y + R(y, \mu), \ \mu) - Px_0.$$

Последнее уравнение — это уравнение в конечномерном пространстве. Оно называется *уравнением разветвления*. Для его исследования могут быть применены как аналитические, так и топологические методы.

8. Построение решений в виде рядов. Пусть x_0 — решение уравнения $x = A(x, \mu_0)$. Пусть оператор $A(x, \mu)$ в окрестности точки (x_0, μ_0) аналитичен в том смысле, что его можно представить в виде ряда Тейлора

$$A(x, \mu) = x_0 + \sum_{i+j \geqslant 1} (\mu - \mu_0)^i C_{ij}(x - x_0),$$

где $C_{ij}(h)$ $(i \geqslant 0, \ j \geqslant 0)$ — операторы, имеющие j-й порядок малости относительно h; в частности, $C_{i0}(h) = C_{i0}$ — некоторые фиксированные элементы из E.

Как и выше, особую роль играет линейный оператор $C_{01} = A'_x(x_0, \mu_0)$. Пусть оператор $A(x, \mu)$ вполне непрерывен. Тогда вполне непрерывен и оператор $C_{01} = A'_x(x_0, \mu_0)$.

Если единица не является собственным значением оператора C_{01}, то при близких к μ_0 значениях μ уравнение $x = A(x, \mu)$ имеет единственное решение $x(\mu)$. Это решение, как оказывается, представимо рядом

$$x(\mu) = x_0 + (\mu - \mu_0)x_1 + (\mu - \mu_0)^2 x_2 + \ldots$$

Для определения элементов $x_1, x_2, \ldots$ этот ряд подставляется в уравнение, затем правая часть раскладывается в ряд по степеням $(\mu - \mu_0)$ и коэффициенты при одинаковых степенях $(\mu - \mu_0)$ приравниваются. В результате приходят к системе уравнений

$$\begin{gathered} x_1 = C_{01}(x_1) + C_{10}, \\ x_2 = C_{01}(x_2) + C_{11}(x_1) + C_{02}(x_1) + C_{20}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Выписанные линейные уравнения можно последовательно решать. Ряд для $x(\mu)$ будет сходиться при достаточно малых $|\mu - \mu_0|$. Для оценки радиуса сходимости обычно конструируют мажорантные числовые ряды.

Пусть теперь единица — собственное значение линейного оператора C_{01}. В этом случае вопрос о количестве решений уравнения $x = A(x, \mu)$ при близких к μ_0 значениях μ становится более сложным. Такие решения иногда можно найти в виде ряда

$$x(\mu) = x_0 + (\mu - \mu_0)^{\frac{1}{k}} x_1 + (\mu - \mu_0)^{\frac{2}{k}} x_2 + \ldots$$

по дробным степеням (k — натуральное число) приращения $\mu - \mu_0$.

Для определеиия элемеитов $x_1, x_2, \ldots$ ряд для $x(\mu)$ снова подставляют в уравнение и сравнивают коэффициенты при одинаковых дробных степенях $\mu - \mu_0$. Для случая $k = 2$, например, получаются уравнения

$$\begin{gathered} x_1 = C_{01}(x_1), \\ x_2 = C_{01}(x_2) + C_{02}(x_1) + C_{10}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Первое из этих уравиеиий — одиородиое лииейиое уравнение. Его решение имеет вид

$$x_1 = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_s e_s,$$

где $e_1, \ldots, e_s$ — базис в подпространстве E_0 собственных векторов, отвечающих собственному значению 1, а $\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_s$ — произвольные числа. Для определения чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ используют условия разрешимости второго уравнения. Эти условия можно записать в виде

$$f_i[C_{02}(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_s e_s) + C_{10}] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

где $f_1, \ldots, f_s$ — полная система собственных векторов (линейных функционалов) сопряженного с C_{01} оператора C_{01}^*, соответствующих собственному значению, равному 1.

Условия разрешимости — это система s нелинейных уравнений с s неизвестными. Если ее можно решить, то элемент найден. Одновременно можно утверждать, что второе уравнение (относительно x_2) разрешимо. Его решение снова определяется с точностью до s произвольных постоянных:

$$x_2 = x_2^0 + \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_s e_s.$$

Коэффициенты $\beta_1, \ldots, \beta_s$ определяются из условия разрешимости третьего уравнения и т. д.

Определение элементов $x_1, x_2, \ldots$ становится более сложным, если коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ нельзя определить из условия разрешимости второго уравнения. Здесь приходится привлекать условия разрешимости последующих уравнений.

Если не удается построить решение в виде ряда по степеням $\mu - \mu_0$, $(\mu - \mu_0)^{\frac{1}{2}}$, то пробуют строить решение в виде ряда по степеням $(\mu - \mu_0)^{\frac{1}{3}}$, и т. д.

ГЛАВА V

ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ С КОНУСОМ

§ 1. Конусы в линейных пространствах

1. Конус в линейной системе. Выпуклое множество K элементов вещественной линейной системы называется *конусом*, если это множество содержит вместе с каждым элементом x ($x \neq \theta$) все элементы вида tx при $t \geqslant 0$ и не содержит элемента $-x$ *).

Примеры.

1. Совокупность всех неотрицательных функций $x(t)$ ($t \in [0, 1]$) пространства $C(0, 1)$ образует в этом пространстве конус **).

Аналогично множества всех неотрицательных функций пространства $L_p(0, 1)$, пространства $M(0, 1)$ и пространства Орлича образуют конусы в этих пространствах.

2. В пространстве ограниченных линейных самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, множество положительных операторов (см. гл. II, § 2, п. 3) образует конус.

3. В координатных пространствах l_p, m, c конусами будут множества элементов с неотрицательными координатами.

4. В функциональных пространствах иногда приходится изучать конусы более узкие, чем конус, состоящий из всех неотрицательных функций. Эти конусы выделяются системой дополнительных однородных неравенств. Например, конус неотрицательных неубывающих функций:

$$x(t_1) \leqslant x(t_2) \qquad (t_1 < t_2),$$

*) Если последнее не выполнено, то множество называется *клином*.

**) Определение пространств см. гл. I, § 2, п. 5.

и конус неотрицательных выпуклых вверх функций:

$$x\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}[x(t_1)+x(t_2)].$$

Конус K линейной системы E называется *воспроизводящим*, если любой элемент $x \in E$ представим в виде разности двух элементов из конуса: $x = x_1 - x_2$ $(x_1,\ x_2 \in K)$.

Конус неотрицательных функций пространства $C[0,\ 1]$ воспроизводящий: каждую функцию $x(t) \in C(0,\ 1)$ можно представить в виде разности неотрицательных функций $x_+(t)$ и $x_-(t)$:

$$x(t) = x_+(t) - x_-(t),$$

где

$$x_+(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } x(t) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x(t) < 0, \end{cases}$$

$$x_-(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x(t) \geqslant 0, \\ -x(t), & \text{если } x(t) < 0. \end{cases}$$

Все конусы, рассмотренные в примерах 1—3, являются воспроизводящими. Однако не каждый конус обладает свойством воспроизводимости. Так, например, конус неотрицательных неубывающих функций (пример 4) в пространстве $C(0,\ 1)$ не является воспроизводящим, так как в виде разности неубывающих функций могут быть представлены лишь функции ограниченной вариации.

2. Полуупорядоченные пространства. Вещественная линейная система E называется линейным *полуупорядоченным пространством*, если для некоторых пар элементов $x,\ y \in E$ определено соотношение $x \leqslant y$ и если знак $\leqslant$ обладает обычными свойствами знака неравенства. Речь идет о следующих свойствах:

1) из $x \leqslant y$ вытекает, что $tx \leqslant ty$ при $t \geqslant 0$ и $ty \leqslant tx$ при $t < 0$,

2) из $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$ вытекает, что $x = y$,

3) из $x_1 \leqslant y_1$ и $x_2 \leqslant y_2$ вытекает, что $x_1 + x_2 \leqslant y_1 + y_2$,

4) из $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$ вытекает, что $x \leqslant z$.

Соотношение $\leqslant$ обычно называют неравенством и говорят, что x *меньше или равен* y, если $x \leqslant y$.

Следует отметить, что знак $\leqslant$ устанавливает отношение полной упорядоченности в пространстве вещественных чисел в том смысле, что любые два числа a и b могут быть соединены этим знаком (либо $a \leqslant b$, либо $a \geqslant b$); знак $\leqslant$ в линейном пространстве этим свойством, вообще говоря, не обладает. Именно с этим обстоятельством связано происхождение термина «полуупорядоченность».

Совокупность K всех элементов x полуупорядоченного пространства, для которых $\theta \leqslant x$, образует конус в этом пространстве. Наоборот, если в линейной системе E задан конус K, то в этой системе можно ввести полуупорядоченность, полагая $x \leqslant y$, если $y - x \in K$.

Таким образом, рассмотрение линейных полуупорядоченных пространств эквивалентно рассмотрению линейных систем с конусом.

Если K — это конус неотрицательных функций в пространстве C (или L_p), то соотношение полуупорядоченности приобретает простой смысл: $x \leqslant y$, если $x(t) \leqslant y(t)$ при всех (или почти всех) значениях t.

3. K-линеалы, миниэдральные конусы. Линейное полуупорядоченное пространство E называется *K-линеалом*, если выполняется следующее свойство:

5) для любых двух элементов x, $y \in E$ существует такой элемент $z \in E$, что $x \leqslant z$, $y \leqslant z$, и $z \leqslant \zeta$ для всякого элемента ζ, обладающего тем же свойством

$$x \leqslant \zeta, \quad y \leqslant \zeta.$$

Элемент z называется *точной верхней границей* или supremum'ом элементов x и y и обозначается $z = \sup(x, y)$.

Из существования в K-линеале supremum'а для любых элементов x, y вытекает существование для любой пары (x, y) infimum'а этих элементов, т. е. такого элемента u, который обладает следующими свойствами: $u \leqslant x$, $u \leqslant y$, и если $v \leqslant x$, $v \leqslant y$, то $v \leqslant u$. При этом пишут $u = \inf(x, y)$.

Конус, образованный элементами $x \geqslant \theta$ каждого K-линеала, называется *миниэдральным*.

Если обозначить через K_x совокупность элементов вида $x + u$ $(u \in K)$, то миниэдральность конуса означает, что для любых x, $y \in E$ может быть указан такой элемент z, что $K_x \cap K_y = K_z$. При этом $z = \sup(x, y)$.

Каждый элемент K-линеала допускает представление $x = x_+ - x_-$, где $x_+ = \sup(x, \theta)$ и называется *положительной частью* x, а $x_- = \sup(-x, \theta)$ и называется *отрицательной частью* x. Элемент $|x| = x_+ + x_-$ называется *модулем* элемента x. Справедливо соотношение

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|.$$

Конусы неотрицательных функций в пространствах C, L_p, M миниэдральны. Конусы неотрицательных последовательностей в пространствах l_p, m, c также миниэдральны. Не каждый конус миниэдрален. Простейшими примерами не миниэдральных конусов являются обычные круглые конусы трехмерного евклидова пространства.

4. K-пространства. Пусть $M \subset E$ — некоторое подмножество полуупорядоченного пространства E. Если все элементы из M меньше или равны (в смысле операции сравнения $\leqslant$) некоторому элементу $z \in E$, то z называется *верхней границей* множества M, а само множество M называется *ограниченным сверху*. Верхняя граница z множества M называется *точной верхней границей* M (пишется $z = \sup M$), если для всякой другой верхней границы $\mathfrak{z}$ множества M выполняется соотношение $\mathfrak{z} \geqslant z$. Аналогично вводятся определения ограниченности снизу, нижней границы и точной нижней границы множества элементов из E.

Если пространство E является K-линеалом, то существует точная верхняя граница у каждого конечного набора элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которая может быть определена с помощью рекуррентного соотношения

$$\sup(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sup\{x_1, \sup(x_2, \ldots, x_n)\}.$$

K-линеал E называется *K-пространством*, если всякое его ограниченное сверху непустое подмножество имеет точную верхнюю грань.

В K-пространстве всякое ограниченное снизу непустое множество элементов имеет точную нижнюю грань.

Конус элементов $x \geqslant \theta$ в K-пространстве иногда называют *сильно миниэдральным*.

Пространства L_p, M, l_p, m являются K-пространствами, K-линеалы C и c не являются K-пространствами.

В K-пространствах может быть введена сходимость по упорядочению, которая называется (o)-*сходимостью*. Для удобства описания к K-пространству присоединяют два новых «несобственных элемента» ∞ и $-\infty$, относительно которых считают, что $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$ для всех элементов $x \in E$. Тогда для неограниченного сверху множества $M \subset E$ пишут $\sup M = \infty$, а для неограниченного снизу множества — $\inf M = -\infty$. Кроме того, если в число элементов множества M, кроме собственных элементов $x \in E$, входит ∞, то считают $\sup M = \infty$, а если входит $-\infty$, то считают $\inf M = -\infty$.

Пусть x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — произвольная последовательность элементов K-пространства E. *Наибольшим* и *наименьшим пределами* этой последовательности называются элементы, определяемые соотношениями

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} x_n = \inf_n [\sup (x_n, x_{n+1}, \ldots)],$$

$$\underline{\lim_{n \to \infty}} x_n = \sup_n [\inf (x_n, x_{n+1}, \ldots)].$$

Эти элементы могут быть конечными либо равными ∞ или $-\infty$. Если $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} x_n$, то последовательность x_n называется (o)-*сходящейся*, а общее значение ее наибольшего и наименьшего пределов называется просто (o)-*пределом* и обозначается $(o)\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Основным видом сходимости в K-пространстве является (o)-сходимость; (o)-сходящиеся последовательности обладают рядом привычных свойств сходящихся последовательностей. Например, если $(o)\text{-}\lim x_n = x$ и $(o)\text{-}\lim y_n = y$ и оба предела конечны, то последовательность $x_n + y_n$ является (o)-сходящейся, причем

$$(o)\text{-}\lim_{n \to \infty} (x_n + y_n) = (o)\text{-}\lim_{n \to \infty} x_n + (o)\text{-}\lim_{n \to \infty} y_n.$$

Далее, для того чтобы $(o)\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, необходимо и достаточно, чтобы $(o)\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} |x_n - x| = \theta$.

Важным свойством K-пространства является свойство полноты относительно (o)-сходимости: *для того чтобы* *последовательность x_n имела конечный (o)-предел, необходимо и достаточно, чтобы*

$$(o)\text{-}\lim_{n\to\infty}\,[\sup_{k,m\geqslant n}|\,x_k-x_m\,|]=\theta.$$

Последовательность x_n называется (t)-*сходящейся* к элементу x, если из любой её подпоследовательности x_{n_i} можно выделить частичную подпоследовательность $x_{n_{i_k}}$ так, что $(o)\text{-}\lim\limits_k x_{n_{i_k}}=x$. Если последовательность (o)-сходится, то она и (t)-сходится.

В K-пространстве M (o)-сходимость последовательности элементов совпадает со сходимостью почти всюду, а (t)-сходимость в M означает сходимость по мере. В K-пространстве l_p $(p\geqslant 1)$ (o)-сходимость и (t)-сходимость совпадают.

5. Конусы в банаховом пространстве. Если система E является банаховым пространством, то под *конусом в банаховом пространстве* E понимается всякий конус системы E, являющийся замкнутым множеством в пространстве E.

Если конус K в банаховом пространстве E является воспроизводящим, то существует константа M такая, что для каждого $x\in E$ имеется представление $x=x_1-x_2$ $(x_1,\ x_2\in K)$, в котором $\|x_1\|\leqslant M\|x\|$ и $\|x_2\|\leqslant M\|x\|$.

Частным случаем воспроизводящего конуса является телесный конус. Конус называется *телесным*, если он содержит по крайней мере один внутренний элемент. Примером телесного конуса может служить конус неотрицательных функций пространства $C[0,\ 1]$. Внутренними элементами этого конуса являются функции с положительным минимумом. Конус из примера 2 п. 1 и конус неотрицательных последовательностей пространства m ограниченных последовательностей также телесны. Конусы неотрицательных функций пространства $L_p[0,\ 1]$ $(p\geqslant 1)$ и неотрицательных последовательностей координатных пространств l_p $(p\geqslant 1)$ свойством телесности не обладают. Таким образом, не каждый воспроизводящий конус телесен. В конечномерном пространстве каждый воспроизводящий конус телесен.

Конус K называется *нормальным*, если существует такое $\delta>0$, что для любых $e_1,\ e_2\in K$, $\|e_1\|=\|e_2\|=1$, выполняется неравенство $\|e_1+e_2\| \geqslant \delta$. Если конус K нормален, то для любых элементов f_1, $f_2 \in K$

$$\|f_1+f_2\| \geqslant \frac{\delta}{2} \max\{\|f_1\|, \|f_2\|\}.$$

Класс нормальных конусов является весьма важным.

Конусы неотрицательных функций в пространствах C, $L_p (p \geqslant 1)$, l_p, m нормальны; в качестве постоянной δ, фигурирующей в определении нормального конуса, в этих примерах может быть взята 1. Примером нормального конуса может служить и конус положительных линейных операторов в пространстве самосопряженных операторов.

Не все конусы нормальны. Так, например, конус неотрицательных функций в пространстве $C^{(1)}[0, 1]$ непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$ (см. гл. I, § 2, п. 5) свойством нормальности не обладает.

Если конус K нормален, то полуупорядоченность, установленная в E этим конусом, обладает следующим свойством: в E можно ввести такую новую норму $\|\ldots\|_1$, эквивалентную первоначально заданной норме, что для любых x, $y \in E$ из соотношения $\theta \leqslant x \leqslant y$ следует неравенство $\|x\|_1 \leqslant \|y\|_1$. Справедливо и обратное утверждение. В силу эквивалентности норм $\|\ldots\|_1$ и $\|\ldots\|$ это свойство нормального конуса можно сформулировать в виде следующего критерия: *конус K нормален тогда и только тогда, когда из неравенства $\theta \leqslant x \leqslant y$ следует скалярное неравенство $\|x\| \leqslant M\|y\|$, где M — постоянная.*

Существует еще несколько критериев нормальности конуса. Один из них связан с понятием u_0-нормы. Пусть u_0 — некоторый фиксированный ненулевой элемент из конуса K. Элемент $x \in E$ называют *u_0-измеримым*, если при некоторых неотрицательных t_1 и t_2

$$-t_1 u_0 \leqslant x \leqslant t_2 u_0.$$

Пусть E_{u_0} — множество всех u_0-измеримых элементов, $\alpha(x)$ — нижняя грань чисел t_1, $\beta(x)$ — нижняя грань чисел t_2 для $x \in E_{u_0}$. Это множество является линейным пространством. Если теперь положить для всех элементов x из E_{u_0}

$$\|x\|_{u_0} = \max\{\alpha(x), \beta(x)\},$$

то множество E_{u_0} становится нормированным пространством, а число $\|x\|_{u_0}$ называется *u_0-нормой* элемента x.

Для нормальности конуса K необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\|x\|_E \leqslant M\|x\|_{u_0}\cdot\|u_0\|_E \quad (x\in E_{u_0},\ u_0\in K,\ u_0\neq\theta),$$

где постоянная M не зависит ни от x, ни от u_0.

Из последнего неравенства следует, что нормальность конуса K обеспечивает полноту пространства E_{u_0} по u_0-норме.

6. Правильные конусы. Конус $K\subset E$ называется *правильным*, если порождаемая им полуупорядоченность обладает тем свойством, что для любой последовательности x_n ($n=1, 2, \ldots$) из соотношений

$$x_1\leqslant x_2\leqslant \ldots \leqslant x_n\leqslant \ldots$$

и

$$x_n\leqslant u \quad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

где u — некоторый элемент пространства E, вытекает сходимость последовательности x_n по норме пространства E. Иными словами, конус K правилен, если сходится по норме каждая монотонная (по конусу) и ограниченная (также по конусу) последовательность элементов пространства.

Примером правильного конуса может служить конус неотрицательных функций пространства L_p ($p\geqslant 1$); примером конуса, не являющегося правильным,— конус неотрицательных функций пространства C. Правильными являются конусы неотрицательных последовательностей в пространствах l_p ($p\geqslant 1$) и в пространстве c_0 сходящихся к нулю числовых последовательностей. Конус неотрицательных последовательностей пространства m всех ограниченных последовательностей свойством правильности не обладает.

Важным является то, что *каждый правильный конус является нормальным.*

Аналогично можно поставить вопрос о сходимости по норме каждой монотонной (в смысле полуупорядоченности, порожденной конусом K) ограниченной по норме последовательности элементов банахова пространства E. Ясно, что такая сходимость имеет место далеко не всегда. Например, в пространстве $C[0, 1]$ монотонная по конусу неотрицательных функций последовательность $x_n(t)=1-t^n$ ограничена по норме и в то же время не сходится. В связи с этим вводится еще один класс конусов. Конус K называется *вполне правильным*, если порождаемая им полуупорядоченность такова, что для любой последовательности x_n из соотношений $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots$ и из скалярного неравенства $\|x_n\| \leqslant C$ $(n=1, 2, \ldots)$, где C — постоянная, следует сходимость последовательности x_n по норме пространства E.

Примерами вполне правильных конусов могут служить конусы неотрицательных функций в пространствах L_p $(p \geqslant 1)$, конус неотрицательиых последовательностей в l_p $(p \geqslant 1)$. Конус неотрицательных последовательностей в пространстве c_0, являющийся, как указано выше, правильным, не является вполне правильным: последовательность

$$x_1 = (1, 0, 0, \ldots), \quad x_2 = (1, 1, 0, 0, \ldots), \ldots$$
$$\ldots, x_n = (1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots), \ldots$$

элементов пространства c_0 монотонна по этому конусу, ограничена по норме и в то же время не сходится. Приведенный пример показывает, что не каждый правильный конус вполне правилен. Однако каждый вполне правильный конус является правильным конусом.

Правильный конус K является вполне правильным при выполнении одного из следующих условий:

1) конус K телесен;

2) пространство E слабо полно.

Функционал $f(x)$, не обязательно линейный, называется *положительным*, если $f(x) \geqslant 0$ при $x \in K$; функционал называется *строго положительным*, если $f(x) > 0$ при $x \in K$, $x \neq \theta$. Функционал $f(x)$ называется *монотонным* относительно конуса K, если соотношение $\theta \leqslant x \leqslant y$ всегда влечет за собой неравенство $f(x) \leqslant f(y)$. Положительный функционал $f(x)$ называется *строго растущим*, если для любых $h_n \in K$ $(n=1, 2, \ldots)$ из $\|h_n\| \geqslant \varepsilon_0 > 0$ $(n=1, 2, \ldots)$ вытекает, что

$$\lim_{n \to \infty} f(h_1 + h_2 + \ldots + h_n) = \infty.$$

Если на конусе K может быть определен монотонный строго растущий функционал, то конус K правилен.

Если на конусе K может быть определен строго растущий и ограниченный на каждом шаре функционал $f(x)$, то конус K вполне правилен.

Примером строго растущего монотонного на конусе неотрицательных функций пространства $L_p[0, 1]$ $(p \geqslant 1)$ функционала является p-я степень нормы элемента:

$$f(x) = \int_0^1 |x(t)|^p \, dt.$$

Справедлив результат отрицательного характера: телесный миниэдральный конус в бесконечномерном пространстве не может быть правильным.

7. Теоремы о реализации полуупорядоченных пространств. Пусть K — нормальный конус сепарабельного банахова пространства E. Тогда существует взаимно однозначное линейное и непрерывное отображение пространства E в подпространство пространства $C(0, 1)$, при котором элементы из K и только они переходят в неотрицательные функции.

Если E не сепарабельно, то справедливо аналогичное утверждение с заменой $C(0, 1)$ на пространство $C(Q)$ непрерывных функций, заданных на некотором бикомпакте Q.

В случае, когда в банаховом пространстве E имеется телесный нормальный миниэдральный конус K, то существует линейное взаимно однозначное и непрерывное отображение пространства E на все пространство $C(Q)$, где Q — некоторый бикомпакт, при котором K переходит в множество K_Q всех неотрицательных на Q функций.

Частным случаем последнего утверждения является следующее: пусть E есть n-мерное пространство, а $K \subset E$ — миниэдральный телесный конус; тогда в E существует такой базис $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, что множество всех векторов $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$ с неотрицательными координатами $\xi_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ совпадает с K.

Если в сепарабельном банаховом пространстве E задан миниэдральный конус K и $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ при $x, y \in K$, то существует линейное взаимно однозначное и непрерывное отображение пространства E на пространство $L(0, 1)$, при котором K переходит в множество всех почти всюду неотрицательных функций из $L(0, 1)$. Если E не сепарабельно, то $L(0, 1)$ заменяется пространством $L(Q)$ на некотором бикомпакте с мерой.

§ 2. Линейные положительные функционалы

1. Положительные функционалы. Наиболее важным классом положительных функционалов (т. е. таких функционалов, что $f(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant \theta$) являются линейные положительные функционалы.

Если конус K в банаховом пространстве является воспроизводящим, то каждый линейный положительный функционал непрерывен. В дальнейшем под линейным положительным функционалом понимается непрерывный функционал.

Для каждого конуса K существуют линейные положительные функционалы. Более того, для каждого $x \in K$ ($x \neq \theta$) можно указать такой положительный линейный непрерывный функционал f, что $f(x) > 0$.

Если пространство E сепарабельно, то можно построить такой линейный непрерывный функционал $f(x)$, что $f(x) > 0$ для всех $x \in K$ ($x \neq \theta$).

Если конус K телесен и u_0 — любой его внутренний элемент, то $f(u_0) > 0$ для каждого положительного функционала f. Для элемента $v_0 \in K$, не являющегося внутренним элементом конуса K, найдется по крайней мере один такой положительный функционал f, что $f(v_0) = 0$. На элементе, не принадлежащем конусу K, по крайней мере один из положительных функционалов принимает отрицательное значение. Таким образом, каждый конус K однозначно описывается множеством K' положительных линейных непрерывных функционалов.

Множество $K' \subset E'$ положительных линейных функционалов может не быть конусом: из $f \in K'$ и $f \neq \theta$ еще не следует, что $-f \overline{\in} K'$ (т. е. множество K' является, вообще говоря, клином). Однако K' является конусом, если K — воспроизводящий конус. Конус K' в этом случае называется *сопряженным конусом*.

Исходя из общего вида линейного функционала в конкретных функциональных пространствах, нетрудно, как правило, установить общий вид положительных линейных функционалов в этих пространствах. Пусть K—конус неотрицательных функций. Тогда общий вид положительного линейного функционала в пространстве $L_p(\Omega)$ ($p \geqslant 1$) (где Ω— некоторое множество) определяется формулой

$$f(x)=\int_{\Omega} x(t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где $\varphi(t)$—неотрицательная функция из сопряженного пространства $L_q(\Omega)$ $\left(q=\frac{p}{p-1}\right)$, $L_\infty=M$. Общий вид положительного линейного функционала в пространстве $C(0,\ 1)$ описывается формулой

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\,dg(t),$$

где $g(t)$—неубывающая функция.

Таким образом, для конуса K неотрицательных функций конус K' совпадает с конусом неотрицательных функций пространства L_q (случай $E=L_p$) и с конусом неубывающих функций (случай $E=C$).

Аналогично общий вид положительного линейного функционала f в пространстве l_p ($p \geqslant 1$) с конусом K неотрицательных последовательностей дается равенством

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

$$(x=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots),\quad y=(y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots)),$$

где $y=(y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots)\in l_q$—произвольная неотрицательная последовательность.

Важным является следующее утверждение: *для того чтобы сопряженный конус K' был воспроизводящим, необходимо и достаточно, чтобы конус K был нормальным.*

Таким образом, если конус K нормален, то для каждого $f\in E'$ существует представление $f=f_1-f_2$ в виде разности положительных функционалов f_1 и f_2. Это представление не единственно: для любого $g\in K'$ будет

$$f=(f_1+g)-(f_2+g).$$

Если конус K телесен и миниэдрален, то существует минимальное представление

$$f = f_1^0 - f_2^0 \quad (f_1^0, f_2^0 \in K'),$$

обладающее тем свойством, что для любого другого представления $f_1^0 \leqslant f_1$ и $f_2^0 \leqslant f_2$.

2. Продолжение линейных положительных функционалов. Пусть E—банахово пространство, а $E_0 \subset E$—некоторое его подпространство, K_0 и K—конусы, соответственно в E_0 и E, причем $K_0 = K \cap E_0$. Пусть f—линейный непрерывный функционал, определенный на E_0, положительный относительно конуса K_0 ($f(x) \geqslant 0$ при $x \in K_0$). Линейный непрерывный функционал F, определенный на E и положительный относительно конуса K, называется ***положительным продолжением*** функционала f с подпространства E_0 на пространство E, если $F(x) = f(x)$ при $x \in E_0$.

Пусть для любого элемента $x \in E$ существует представление $x = x_1 - x_2$, где $x_1 \in K_0$, $x_2 \in K$. Тогда для всякого линейного непрерывного положительного функционала f, определенного на E_0, существует положительное продолжение F на пространство E. При этом все линейные положительные продолжения F функционала f на пространство E ограничены и

$$\|f\| \leqslant \|F\| \leqslant C\|f\|,$$

где C—постоянная.

Другую теорему о продолжении можно сформулировать для K-линеалов. Пусть E_0—линейное многообразие в K-линеале E, обладающее тем свойством, что для любого $x \in E$ найдется $x' \subset E$, мажорирующее модуль элемента x:

$$|x| \leqslant x'.$$

Тогда каждый положительный линейный функционал, заданный на E_0 (конус $K_0 \subset E_0$ состоит из $x \in E_0 \cap K$), может быть продолжен до положительного линейного функционала, определенного на всем пространстве E.

3. Равномерно положительные функционалы. Положительный линейный функционал $f(x)$ называется ***равномерно положительным***, если существует такое положительное число a, что

$$f(x) \geqslant a\|x\| \qquad (x \in K).$$

В пространстве $L(\Omega)$ суммируемых на некотором множестве Ω функций с конусом K неотрицательных на Ω функций равномерно положительным будет функционал

$$f(x) = \int_{\Omega} x(t)\,dt.$$

В пространствах L_p, где $p > 1$, нет равномерно положительных (на конусе K неотрицательных функций) линейных функционалов. В пространстве C также нет равномерно положительных линейных функционалов.

Если существует равномерно положительный функционал, то конус нормален и даже вполне правилен. Обратное утверждение неверно.

Для того чтобы существовал равномерно положительный функционал, необходимо и достаточно, чтобы конус K можно было заключить в другой конус K_1 так, чтобы каждый ненулевой элемент $x_0 \in K$ содержался в K_1 вместе со своей шаровой окрестностью радиуса $q\|x_0\|$, где число q не зависит от выбора $x_0 \in K$.

Последним свойством всегда обладает конус $K(F)$, построенный по замкнутому ограниченному выпуклому множеству F, не содержащему нуля, следующим образом: $K(F)$ состоит из всех элементов $x \in E$, которые допускают представление $x = tz$, где $t \geqslant 0$ и $z \in F$.

4. Ограниченные функционалы на конусе. Аддитивный и однородный функционал $f(x)$, определенный только на элементах конуса K банахова пространства E, называется *ограниченным*, если

$$\|f\|_+ = \sup_{x \in K,\ \|x\|=1} |f(x)| < \infty.$$

Если аддитивный и однородный функционал задан на телесном конусе и неотрицателен на нем, то он ограничен.

Ограниченный аддитивный и однородный функционал, заданный на воспроизводящем (в частности, на телесном) конусе, однозначно продолжается до линейного непрерывного функционала, заданного на всем пространстве E, равенством

$f(x)=f(x_1)-f(x_2)$, где $x=x_1-x_2$ и $x_1, x_2 \in K$. Если конус не является воспроизводящим, то при указанном продолжении функционала на линейную оболочку конуса может получиться уже неограниченный функционал. Оказывается, что при условии нормальности конуса каждый ограниченный, аддитивный и однородный на K функционал $f(x)$ мажорируется на конусе K некоторым линейным непрерывным положительным функционалом, т. е. существует $\Phi(x) \in K'$ такой, что

$$|f(x)| \leqslant \Phi(x) \qquad (x \in K).$$

Если норма в E введена так, что $\|x\| \leqslant \|y\|$ при $\theta \leqslant x \leqslant y$, то функционал Φ может быть выбран таким образом, что $\|\Phi\| = \|f_+\|$ при неотрицательном f и $\|\Phi\| \leqslant 2\|f_+\|$ в общем случае.

§ 3. Линейные положительные операторы

1. Понятие положительного оператора. Пусть E—банахово пространство с конусом K. Линейный оператор A называется *положительным*, если он преобразует конус K в себя: $AK \subset K$. Положительный линейный оператор обладает свойством монотонности: для любых элементов $x, y \in E$ из $x \leqslant y$ вытекает, что $Ax \leqslant Ay$.

В случае конечномерных пространств с конусом, составленным из векторов с неотрицательными компонентами, линейные положительные операторы определяются матрицами с неотрицательными элементами.

Наиболее важным примером линейных положительных операторов, действующих в различных пространствах функций, являются линейные интегральные операторы

$$A\varphi(t) = \int_\Omega K(t, s)\varphi(s)\,ds$$

с неотрицательными ядрами $K(t, s)$ ($t, s \in \Omega$; Ω—ограниченное замкнутое множество конечномерного пространства). Если ядро $K(t, s)$ удовлетворяет условиям, при которых оператор действует в соответствующем пространстве, то при конусе K неотрицательных функций этот оператор является линейным положительным оператором.

Если конус K телесен и для каждого ненулевого φ из K найдется такое n, что $A^n\varphi$ является внутренним элементом конуса, то оператор A называется ***сильно положительным.***

Если интегральный оператор действует в пространстве C и если некоторая итерация ядра $K(t, s)$:

$$K_N(t, s) = \int_\Omega \cdots \int_\Omega K(t, s_1) K(s_1, s_2) \ldots K(s_{N-1}, s)\, ds_1 \ldots ds_{N-1},$$

положительна, то этот оператор будет сильно положительным в пространстве C.

Линейный положительный оператор A называется ***u_0-ограниченным снизу*** (u_0 — фиксированный элемент из K), если для каждого ненулевого $\varphi \in K$ можно указать такое натуральное n и такое положительное число $\alpha = \alpha(\varphi)$, что $\alpha u_0 \leqslant A^n\varphi$.

Аналогично определяются операторы, ***u_0-ограниченные сверху.*** Оказывается, что если оператор A u_0-ограничен сверху и снизу, то для каждого $\varphi \in K$ при некотором n и $\alpha(\varphi)$, $\beta(\varphi) > 0$ выполняется соотношение

$$\alpha(\varphi) u_0 \leqslant A^n\varphi \leqslant \beta(\varphi) u_0.$$

Операторы, удовлетворяющие последнему соотношению, называются ***u_0-положительными.***

Пусть интегральный оператор действует в $L_p(\Omega)$ $(p \geqslant 1)$. Если при этом ядро $K(t, s)$ удовлетворяет неравенству

$$K(t, s) \geqslant m > 0 \qquad (t, s \in \Omega),$$

то оператор будет u_0-ограниченным снизу, если в качестве u_0 выбрать функцию $u_0(t) \equiv 1$. При этом оператор может не обладать свойством u_0-ограниченности сверху.

2. Позитивные собственные числа. Собственное число $\lambda_0 \neq 0$ положительного оператора A называется ***позитивным,*** если ему соответствует собственный элемент e_0 из конуса K. Этот элемент называется ***положительным собственным элементом*** оператора A. Позитивное собственное число всегда положительно.

Позитивное собственное число обладает важным свойством: *если конус K является воспроизводящим, а оператор A является u_0-положительным, то позитивное собственное число простое и больше абсолютных величин остальных собственных чисел.*

Это утверждение, вообще говоря, теряет силу, если опустить условие u_0-положительности оператора A. Если элемент u_0 сам является положительным собственным элементом оператора A, то вместо u_0-положительности достаточно требовать u_0-ограниченности сверху оператора A.

Ряд теорем существования позитивных собственных чисел можно сформулировать для вполне непрерывных операторов.

Пусть замыкание линейной оболочки конуса K есть все пространство E. *Если линейный положительный вполне непрерывный оператор A имеет собственные числа, отличные от нуля, то он имеет позитивное собственное число λ_0, не меньшее модуля любого другого собственного числа.* Число λ_0 является также позитивным собственным числом для оператора A', действующего в сопряженном пространстве E' с конусом K'.

Практически удобно пользоваться следующим утверждением: пусть для линейного положительного вполне непрерывного оператора A существует такой элемент u, что $u=v-w$ $(v,\ w \in K)$, $-u \overline{\in} K$ и $A^p u \geqslant \alpha u$ $(\alpha>0)$ при некотором натуральном p; тогда оператор A имеет позитивное собственное число λ_0, причем $\lambda_0 \geqslant \sqrt[p]{\alpha}$. Число λ_0 является также позитивным собственным числом оператора A'.

Предыдущие результаты получают дальнейшее развитие, если конус K является телесным.

Пусть A — линейный вполне непрерывный оператор, сильно положительный относительно телесного конуса K. Тогда:

1) *Оператор A имеет внутри K один и только один (нормированный) собственный элемент x_0:*

$$Ax_0 = \lambda_0 x_0 \quad (\lambda_0 > 0).$$

2) *Сопряженный оператор A' имеет в K' один и только один нормированный собственный элемент ψ:*

$$A'\psi = \lambda_0 \psi;$$

при этом ψ — строго положительный функционал.

3) *Соответствующее этим элементам собственное число λ_0 является простым и превосходит по модулю всякое другое собственное число оператора A.*

Обратно, *если вполне непрерывный оператор обладает свойствами* 1), 2), 3), *то он сильно положителен относительно* K.

Теоремы существования позитивных собственных чисел можно проиллюстрировать на интегральном уравнении Фредгольма

$$\int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds = \lambda\varphi(t)$$

с неотрицательным непрерывным в квадрате $a \leqslant t, s \leqslant b$ ядром $K(t, s)$. Если существует система точек $s_1, s_2, \ldots, s_p$ из (a, b) такая, что

$$K(s_1, s_2)K(s_2, s_3)\ldots K(s_{p-1}, s_p)K(s_p, s_1) > 0,$$

то уравнение имеет положительное собственное число λ_0, не меньшее по модулю всякого другого его собственного числа. Этому числу λ_0 отвечает по крайней мере одно неотрицательное решение (собственная функция) интегрального уравнения.

Если для всякой непрерывной неотрицательной функции $\varphi(s)$, не равной тождественно нулю, найдется такая итерация $K_N(t, s)$, что

$$\int_a^b K_N(t, s)\varphi(s)\,ds > 0 \qquad (a \leqslant t \leqslant b),$$

то уравнение Фредгольма имеет единственную положительную собственную функцию. Транспонированное уравнение

$$\int_a^b K(s, t)\psi(s)\,ds = \lambda\psi(t)$$

имеет единственное положительное решение, отвечающее тому же положительному собственному числу. Собственное число λ_0 по модулю больше всех остальных собственных чисел интегрального уравнения.

Пусть теперь в интегральном уравнении ядро $K(t, s)$ — неотрицательная измеримая в квадрате $a \leqslant t, s \leqslant b$ функция, удовлетворяющая условию

$$\int_a^b\int_a^b |K(t, s)|^2 \, dt\, ds < \infty.$$

Если неравенство

$$K(s_1, s_2) K(s_2, s_3) \ldots K(s_p, s_1) > 0$$

выполняется при некотором $p \geqslant 2$ на множестве точек $(s_1, s_2, \ldots, s_p)$ положительной меры в соответствующем p-мерном кубе, то в этом случае интегральное уравнение имеет по крайней мере одно собственное число, причем среди наибольших по модулю собственных чисел имеется положительное. Последнему отвечает по крайней мере одна неотрицательная собственная функция из L_2.

3. Положительные операторы на миниэдральном конусе. Пусть K — миниэдральный телесный конус, а A — линейный положительный вполне непрерывный оператор, имеющий внутри K неподвижный вектор v:

$$Av = v.$$

Тогда собственные числа оператора A, равные по модулю единице, являются корнями целой степени из единицы. Множество неподвижных векторов операторов A и A' имеет базисы $v_1, v_2, \ldots, v_r$ и соответственно $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$, обладающие свойствами:

1) Системы $v_1, v_2, \ldots, v_r$ и $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ биортогональны: $\psi_i(v_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, r)$.

2) Для всякой пары $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, r)$

$$\inf(\psi_i, \psi_j) = \theta.$$

3) Линейные комбинации $\sum c_i v_i$ (или $\sum c_i \psi_i$) являются неотрицательными в том и только в том случае, когда все коэффициенты c_i неотрицательны.

В линейном многообразии M_1 всех собственных и присоединенных элементов оператора A, отвечающих всем собственным числам, по модулю равным единице, можно выбрать базис, также обладающий свойством 3). Оператор A допускает разложение $A = U_1 + A_1$, где оператор U_1 отображает все пространство E на M_1 и элементы базиса переставляет друг с другом, оператор A_1 имеет спектральный радиус <1 (см. гл. I, § 5, п. 6).

В конечномерном случае приведенные утверждения применимы к так называемым *стохастическим матрицам*, т. е. к матрицам (a_{ik}) с неотрицательными элементами, удовлетворяющим условиям

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Для интегрального уравнения

$$\int_a^b K(t,\ s)\,\varphi(s)\,ds = \lambda\varphi(t)$$

с непрерывным неотрицательным ядром, удовлетворяющим условию

$$\int_a^b K(t,\ s)\,ds \equiv 1 \qquad (a \leqslant t \leqslant b),$$

получаются следующие утверждения:

а) Все собственные числа, по модулю равные единице, суть натуральные корни из единицы.

б) Множество собственных функций, отвечающих значению $\lambda = 1$, имеет базис, состоящий из неотрицательных функций $\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \ldots,\ \varphi_r(s)$ и обладающий следующими свойствами:

1°. Для каждой функции $\varphi_j(s)$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r)$ существует в $(a,\ b)$ по крайней мере одна точка, в которой данная функция положительна, а остальные функции базиса равны нулю.

2°. Для каждой точки из интервала $(a,\ b)$ найдется по крайней мере одна функция базиса, положительная в этой точке.

в) Множество собственных функций транспонированного уравнения, отвечающих значению $\lambda = 1$, имеет базис, состоящий из неотрицательных функций $\psi_1(s),\ \psi_2(s),\ \ldots,\ \psi_r(s)$, биортогональный с базисом $\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \ldots,\ \varphi_r(s)$ и обладающий тем свойством, что

$$\psi_i(s)\,\psi_j(s) \equiv 0 \qquad (a \leqslant s \leqslant b;\ i \neq j;\ i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

4. Неоднородное линейное уравнение. Для неоднородного уравнения

$$\lambda\varphi = A\varphi + f$$

с ограниченным линейным положительным оператором A рассматривается вопрос о том, при каких условиях оно имеет решение в конусе K, если f принадлежит K.

Пусть r — спектральный радиус оператора A. Если $\lambda > r$, то неоднородное уравнение при $f \in K$ имеет единственное решение $\varphi \in K$. Если $\lambda \leqslant r$ и оператор A является u_0-положительным, то при любом $f \in K$ неоднородное уравнение не имеет решеиия в конусе K.

5. Инвариантные функционалы и собственные векторы сопряженных операторов. Линейный непрерывный функционал $f(x)$ называется *инвариантным* относительно ограниченного оператора A, если

$$f(x) = f(Ax).$$

Иначе говоря, инвариантный функционал есть неподвижный вектор для сопряженного оператора:

$$A'f = f.$$

Весьма важным является утверждение: *если совокупность ограниченных положительных коммутирующих друг с другом операторов $\{A_h\}$ имеет общий неподвижный элемент внутри телесного конуса K, то существует положительный функционал $F(x)$, инвариантный относительно всех операторов A_h.*

Пример. Пусть G — коммутативная группа, E — пространство ограниченных на G функций $x(g)$, операторы A_h $(h \in G)$ определяются равенством $A_h x(g) = x(g+h)$. Функция $u(g) \equiv 1$ является внутренним элементом конуса всех неотрицательных функций из E, остающимся неподвижным при преобразованиях A_h. Существует инвариантный функционал

$$F(x(g+h)) = F(x(g)) \qquad (h \in G).$$

Если в группе G введена топология, то при определенных условиях функционал $F(\alpha)$ представим в виде интеграла, т. е. на группе существует инвариантный интеграл (см. гл. VI, § 2, п. 1).

Более общим, чем теорема о существовании инвариантного функционала, является утверждение: *для всякой совокупности $\{A_h\}$ коммутирующих друг с другом ограниченных линейных операторов, преобразующих внутренность телесного конуса K в свою часть, существует положительный функционал φ, являющийся общим собственным вектором всех сопряженных операторов:*

$$A_h'\varphi = \lambda_h \varphi \qquad (\lambda_h > 0).$$

6. Несовместные неравенства. Если $y - x\,\overline{\in}\,K$, то пишут $x\,\overline{\leqslant}\,y$.

Пусть положительный оператор A u_0-ограничен снизу, причем

$$Au_0 \geqslant \lambda_0 u_0.$$

Тогда для любого ненулевого $x \in K$ при $\lambda < \lambda_0$

$$Ax\,\overline{\leqslant}\,\lambda x,$$

а из

$$Ax \leqslant \lambda_0 x \quad (x \in K)$$

следует, что

$$x = ku_0 \text{ и } Au_0 = \lambda_0 u_0.$$

Пусть оператор A u_0-ограничен сверху, причем

$$Au_0 \leqslant \lambda_0 u_0,$$

тогда для любого ненулевого $x \in K$ при $\lambda > \lambda_0$

$$Ax\,\overline{\geqslant}\,\lambda x.$$

Пусть оператор A u_0-положителен, причем

$$Au_0 = \lambda_0 u_0$$

тогда для любого ненулевого $x \in K$ $(x \neq cu_0)$ элементы $\lambda_0 x$ и Ax несравнимы:

$$\lambda_0 x\,\overline{\leqslant}\,Ax \text{ и } \lambda_0 x\,\overline{\geqslant}\,Ax.$$

Сформулированные здесь теоремы можно применить к сравнению собственных значений двух операторов.

Пусть A_1 и A_2—два линейных оператора, $A_1x \leqslant A_2x$ при $x \in K$, A_1 u_0-ограничен снизу, причем $A_1u_0 \geqslant \lambda_0 u_0$. Тогда каждое позитивное собственное значение λ_2 оператора A_2 не меньше λ_0.

§ 4. Нелинейные операторы

1. Основные понятия. Положительность и монотонность для нелинейных операторов определяются так же, как и для линейных операторов. Оператор A *положителен*, если $AK \subset K$, и *монотонен*, если из $x \leqslant y$ следует $Ax \leqslant Ay$. В отличие от линейных операторов в рассматриваемом случае монотонность не следует из положительности.

Оператор A *сильно дифференцируем по конусу* K в точке x_0, если для всех $h \in K$

$$A(x_0+h)-Ax_0 = A'(x_0)h + \omega(x_0, h),$$

где $A'(x_0)$—линейный оператор, а

$$\lim_{h \in K, \|h\| \to 0} \left\| \frac{\omega(x_0, h)}{\|h\|} \right\| = 0.$$

Линейный оператор $A'(x_0)$ называется *сильной производной по конусу оператора A в точке* x_0. В случае, когда $\frac{\omega(x_0, h)}{\|h\|}$ слабо стремится при $\|h\| \to 0$ $(h \in K)$ к θ, говорят соответственно о слабой производной по конусу K.

Оказывается, что сильная производная $A'(x_0)$ по конусу K от вполне непрерывного оператора преобразует каждое ограниченное множество $T \subset K$ в компактное, а сильная производная по воспроизводящему конусу K от вполне непрерывного оператора является вполне непрерывным оператором.

Важную роль при исследовании нелинейных операторов, наряду с производной по конусу, играет производная на бесконечности. Оператор A называется *сильно дифференцируемым на бесконечности по конусу* K, если существует такой линейный непрерывный оператор $A'(\infty)$, для которого

$$\lim_{R \to \infty} \sup_{\|x\| \geqslant R,\ x \in K} \frac{\|Ax - A'(\infty)x\|}{\|x\|} = 0.$$

При этом $A'(\infty)$ называется *сильной асимптотической производной по конусу* K. Аналогично вводится понятие *слабой дифференцируемости на бесконечности.*

2. Существование положительных решений. Здесь рассматривается уравнение

$$x = Ax$$

с положительным оператором A. Решения уравнения будут неподвижными элементами оператора.

Пусть непрерывный положительный оператор A имеет сильную асимптотическую производную $A'(\infty)$ по конусу, и пусть спектральный радиус оператора $A'(\infty)$ меньше единицы. *Для существования в конусе K по крайней мере одной неподвижной точки достаточно, чтобы выполнялось одно из условий:*

а) *оператор A вполне непрерывен,*

б) *оператор A монотонный и конус K вполне правилен,*

в) *пространство E рефлексивно, оператор A слабо непрерывен.*

Для вполне непрерывного оператора условие существования $A'(\infty)$ можно заменить следующим: существует такое R, что при всех $\varepsilon > 0$ $Ax \overline{\geqslant} (1+\varepsilon)x$ $(x \in K,\ \|x\| \geqslant R)$.

Конусным интервалом $\langle x_0,\ u_0\rangle$ называется совокупность элементов x, для которых $x_0 \leqslant x \leqslant u_0$.

Для существования у монотонного на интервале $\langle x_0,\ u_0\rangle$ оператора по крайней мере одной неподвижной точки достаточно, чтобы он преобразовывал $\langle x_0,\ u_0\rangle$ в себя и чтобы выполнялось одно из следующих условий:

а) *конус K сильно миниэдрален,*

б) *конус K правилен, оператор A непрерывен,*

в) *конус K нормален, оператор A вполне непрерывен,*

г) *конус K нормален, пространство E рефлексивно, оператор A слабо непрерывен.*

При выполнении условий б)—г) неподвижная точка оператора A может быть получена как предел последовательности $x_n = Ax_{n-1}$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$. Если дополнительно известно, что в $\langle x_0,\ u_0\rangle$ лежит единственная неподвижная точка оператора A, то в случаях б)—в) последовательные приближения $y_n = Ay_{n-1}$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ сходятся по норме к решению, каково бы ни было $y_0 \in \langle x_0,\ u_0\rangle$.

3. Существование ненулевого положительного решения. Когда $A\theta = \theta$, то нередко встает вопрос о существовании в конусе вторых (отличных от θ) неподвижных точек у положительного оператора A. В ряде случаев ответ на этот вопрос может быть получен.

Говорят, что положительный оператор A $(A\theta=\theta)$ является *сжатием конуса* на участке от r до R $(0<r<R)$, если

$$Ax\,\overline{\leqslant}\,x \quad (x\in K,\ \|x\|\leqslant r,\ x\neq\theta)$$

и при всех $\varepsilon>0$

$$Ax\,\overline{\geqslant}\,(1+\varepsilon)\,x \qquad (x\in K,\ \|x\|\geqslant R).$$

Оператор A $(A\theta=\theta)$ называется *растяжением конуса* на участке конуса от r до R $(0<r<R)$, если для всех $\varepsilon>0$

$$Ax\,\overline{\geqslant}\,(1+\varepsilon)\,x \quad (x\in K,\ \|x\|\leqslant r,\ x\neq\theta)$$

и

$$Ax\,\overline{\leqslant}\,x \quad (x\in K,\ \|x\|\geqslant R).$$

Пусть положительный вполне непрерывный оператор A является оператором сжатия (растяжения) на некотором участке конуса K; тогда оператор A имеет на K по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.

Проверка условий сжатия или растяжения облегчается, если существуют такие два линейных оператора A_- и A_+, для которых

$$A_-x\leqslant Ax\leqslant A_+x \qquad (x\in K).$$

Условия сжатия заведомо будут иметь место, если

$$A_-x\,\overline{\leqslant}\,x \qquad (x\in K,\ \|x\|\leqslant r),$$
$$A_+x\,\overline{\geqslant}\,x \qquad (x\in K,\ \|x\|\geqslant R).$$

Аналогично можно проверять и условия растяжения. При этом оператор A_- достаточно построить лишь на элементах малой нормы, а оператор A_+ — на элементах с большой нормой. При построении оператора A_- часто используют производную по конусу $A'(\theta)$, а при построении A_+ — производную по конусу на бесконечности $A'(\infty)$ (см. [25]).

4. Вогнутые операторы. Пусть u_0 — фиксированный ненулевой элемент из K. Оператор A называется u_0-вогнутым на K, если он положителен и монотонен и для любого ненулевого $x\in K$ существуют такие положительные числа α и β, что

$$\alpha u_0 \leqslant Ax \leqslant \beta u_0,$$

и для любого $x \in K$ с условием $x \geqslant \gamma u_0$ $(\gamma > 0)$ и для каждого сегмента $[a, b] \subset (0, 1)$ найдется такое $\eta = \eta(x, a, b) > 0$, что

$$A(tx) \geqslant (1 + \eta) t Ax \qquad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Множество тех λ, при которых уравнение

$$Ax = \lambda x$$

с вполне непрерывным u_0-вогнутым оператором имеет ненулевое решение в конусе K, образует некоторый интервал (α, β). Для каждого $\lambda \in (\alpha, \beta)$ уравнение не может иметь в конусе K более одного отличного от θ решения. При $\lambda_1 > \lambda_2$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in (\alpha, \beta))$ для соответствующих решений уравнения x_1 и x_2 из K справедливо неравенство $x_1 \leqslant x_2$.

Если $A\theta = \theta$ и сильная производная по конусу $A'(\theta)$ является вполне непрерывным оператором, то верхняя грань β является положительным собственным значением оператора $A'(\theta)$. Если при этом оператор $A'(\theta)$ u_0-положителен, то β совпадает с единственным позитивным собственным числом оператора $A'(\theta)$.

Если оператор A имеет сильную асимптотическую производную $A'(\infty)$ по конусу, являющуюся вполне непрерывным u_0-положительным оператором, то α является собственным числом оператора $A'(\infty)$.

Примером нелинейного положительного оператора в пространстве $C(0, 1)$ может служить интегральный оператор Урысона

$$Ax(t) = \int_0^1 K(t, s, x(s))\, ds,$$

в котором функция $K(t, s, u)$ непрерывна и $K(t, s, u) \geqslant 0$ при $u \geqslant 0$. Этот оператор монотонен, если функция $K(t, s, u)$ не убывает с возрастанием u. Если, кроме того, $K(t, s, 0) \equiv 0$ и при $u_2 > u_1$ неравенство

$$\frac{1}{u_1} K(t, s, u_1) - \frac{1}{u_2} K(t, s, u_2) > 0$$

выполняется при каждом t почти для всех s, то интегральный оператор будет u_0-вогнутым. При этом за u_0 принимается функция, тождественно равная 1.

5. Сходимость последовательных приближений. Пусть уравнение $x = Ax$ с u_0-вогнутым оператором A на нормальном конусе K имеет единственное ненулевое решение x^* в K. Тогда последовательные приближения $x_n = Ax_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сходятся к x^*, каково бы ни было ненулевое начальное приближение $x_0 \in K$.

Более того, последовательные приближения будут сходиться в u_0-норме, которая, как было указано в § 1, п. 5, сильнее исходной нормы пространства E.

Условие u_0-вогнутости можно ослабить, требуя для $A(tx)$ лишь выполнения неравенства $A(tx) \geqslant tAx$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Тогда сходимость последовательных приближений при любом ненулевом начальном приближении из K будет иметь место, если конус K правилен или если оператор A вполне непрерывен.

ГЛАВА VI

КОММУТАТИВНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ КОЛЬЦА

§ 1. Основные понятия

1. Коммутативное нормированное кольцо *). *Коммутативным нормированным кольцом* называется комплексное банахово пространство R, для элементов x, y, ... которого определено ассоциативное и коммутативное умножение xy, перестановочное с умножением на комплексные числа, дистрибутивное относительно сложения и непрерывное по каждому сомножителю **).

В общей теории коммутативных нормированных колец можно ограничиться рассмотрением колец с *единицей*, т. е. с таким элементом e, что $ex = x$ для всякого $x \in R$. Если кольцо не имеет единицы, то ее можно формально присоединить к кольцу, т. е. рассмотреть совокупность элементов вида $\lambda e + x$, где e — присоединенная единица, x — произвольный элемент из R с нормой $\|\lambda e + x\| = |\lambda| + \|x\|$.

В каждом нормированном кольце с единицей можно так изменить норму на эквивалентную, что в новой норме будут выполняться соотношения $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$, $\|e\| = 1$.

Множество K элементов кольца R называется *системой образующих* этого кольца, если наименьшим замкнутым подкольцом с единицей, содержащим K, служит все R. Единица в число образующих не включается.

---

*) Определения кольца, группы, алгебры и другие алгебраические определения см. в *СМБ*, «Высшая алгебра».

**) С точки зрения терминологии современной алгебры более точным является термин «банахова алгебра», но здесь сохраняется термин «нормированное кольцо», введенный в первоначальных работах И. М. Гельфанда.

2. Примеры нормированных колец.

1. Пусть $C(0, 1)$ — пространство всех комплексных функций, определенных и непрерывных на отрезке $[0, 1]$, наделенное нормой $\|x\| = \max |x(t)|$. C есть нормированное кольцо (с единицей $x(t) \equiv 1$) относительно обычного умножения.

2. Пусть $C^{(n)}(0, 1)$ — пространство всех комплексных функций на том же отрезке $[0, 1]$, обладающих непрерывной n-й производной, наделенное нормой

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x^{(k)}(t)|}{k!}.$$

$C^{(n)}$ есть нормированное кольцо (с обычным умножением), причем $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

3. Пусть $W(0, 2\pi)$ — пространство всех комплексных функций $x(\theta)$, непрерывных на окружности $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ и разлагающихся в абсолютно сходящийся ряд Фурье

$$x(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\theta}$$

с нормой $\|x\| = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} |c_m|$. Пространство W образует нормированное кольцо (с обычным умножением), причем снова $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$. Кольцо W часто называют *винеровским*.

4. Пусть A — пространство всех функций комплексного переменного ζ, определенных и непрерывных в круге $|\zeta| \leqslant 1$ и аналитических внутри этого круга, наделенное нормой $\|x\| = \max\limits_{|\zeta| \leqslant 1} |x(\zeta)|$. A есть нормированное кольцо с обычным умножением.

5. Пусть $L_1(-\infty, \infty)$ — пространство всех абсолютно интегрируемых измеримых функций на вещественной прямой $-\infty < t < \infty$ с нормой

$$\|x\| = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt.$$

L_1 образует нормированное кольцо, если за умножение принять *свертку:*

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau.$$

При этом $\|x*y\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$. В кольце L_1 нет единицы относительно введённого умножения. Через V обозначается нормированное кольцо, получающееся путем формального присоединения к L_1 единицы.

6. Пусть $V^{(b)}$ — линейное пространство всех комплексных функций $f(t)$, имеющих ограниченное изменение на $-\infty < t < \infty$, удовлетворяющих условию $f(-\infty) = 0$ и непрерывных справа, с нормой

$$\|f\| = \operatorname*{Var}_{(-\infty,\infty)} (f);$$

$V^{(b)}$ образует коммутативное нормированное кольцо, если умножение в нем определить как свертку:

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)\, df_2(\tau).$$

Единицей в $V^{(b)}$ служит функция

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geqslant 0, \end{cases}$$

причем $\|\varepsilon\| = 1$.

Кольцо V из примера 5 изоморфно и изометрично (см. гл. I, § 2, п. 4) вкладывается в кольцо $V^{(b)}$. Этот изоморфизм достигается, если элементу $\lambda e + x$ поставить в соответствие функцию $\lambda\varepsilon(t) + \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$.

7. Пусть $\alpha(t)$ — положительная функция, определенная и непрерывная для всех вещественных значений t и удовлетворяющая условию

$$\alpha(t_1 + t_2) \leqslant \alpha(t_1)\alpha(t_2),$$

каковы бы ни были t_1 и t_2. $L^{\langle\alpha\rangle}$ — нормированное пространство всех измеримых функций $x(t)$, для которых

$$\|x\| = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, \alpha(t)\, dt < \infty.$$

$L^{\langle\alpha\rangle}$ образует коммутативное нормированное кольцо со свертыванием

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) y(\tau)\, d\tau$$

в качестве умножения. В этом кольце нет единицы. Кольцо, получающееся формальным присоединением единицы к $L^{\langle\alpha\rangle}$, обозначается $V^{\langle\alpha\rangle}$. Кольцо V из примера 5 является частным случаем колец $V^{\langle\alpha\rangle}$ при $\alpha(t) \equiv 1$.

8. Пусть $L_{+}^{\langle\alpha\rangle}$ — совокупность всех измеримых комплексных функций $x(t)$ $(t \geqslant 0)$, удовлетворяющих условию

$$\| x \| = \int_{0}^{\infty} | x(t) | \alpha(t)\, dt < \infty,$$

где $\alpha(t)$ — та же функция, что и в примере 7, но рассматриваемая только при $t \geqslant 0$. $L_{+}^{\langle\alpha\rangle}$ образует нормированное кольцо с умножением, определенным по формуле

$$(x * y)(t) = \int_{0}^{t} x(t-\tau) y(\tau)\, d\tau.$$

Присоединяя к $L_{+}^{\langle\alpha\rangle}$ формальную единицу, получим кольцо, которое обозначается $V_{+}^{\langle\alpha\rangle}$.

Кольца из примеров 7 и 8 называются *винеровскими кольцами с весом*.

3. Нормированное поле. Элемент $y \in R$ называется *обратным* к элементу $x \in R$, если $xy = e$. Элемент кольца, обладающий обратным, называется *обратимым*. Если $\| x - e \| < 1$, то элемент x обратим и обратный к нему представляется в виде *ряда Неймана*:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} (e - x)^k.$$

Если всякий элемент кольца, отличный от нулевого, обладает обратным, то кольцо называется *нормированным полем*. Всякое нормированное поле изоморфно и изометрично полю комплексных чисел.

4. Максимальные идеалы и мультипликативные функционалы. Множество I элементов кольца R с единицей называется *идеалом*, если $IR \subset I$, причем $\{0\} \neq I \neq R$ (AB есть совокупность элементов вида ab, где $a \in A$, $b \in B$; $\{0\}$ — множество, состоящее из нуля). Всякий идеал является линейным многообразием пространства R. Если идеал I замкнут, то он образует подпространство. Фактор-пространство R/I само является нормированным кольцом с естественно определенными операциями и нормой класса смежности X:

$$\|X\| = \inf_{x \in X} \|x\|$$

(см. гл. I, § 4, п. 5). Это фактор-пространство называется *фактор-кольцом кольца R по идеалу I*.

Центральным понятием в теории коммутативных нормированных колец является понятие максимального идеала. Идеал называется *максимальным*, если он не содержится ни в каком другом идеале. Каждый максимальный идеал замкнут.

Элемент $x \in R$ тогда и только тогда обладает обратным, когда он не принадлежит ни одному из максимальных идеалов. Фактор-кольцо по максимальному идеалу изоморфно и изометрично полю комплексных чисел.

Среди непрерывных линейных функционалов над R особую роль играют *мультипликативные* функционалы, т. е. такие, что $M(xy) = M(x)M(y)$. Между максимальными идеалами и мультипликативными функционалами существует тесная связь: *каждый максимальный идеал является гиперплоскостью $M(x) = 0$ для некоторого мультипликативного функционала, и обратно*. Последнее весьма облегчает описание максимальных идеалов заданного кольца, сводя эту задачу к описанию мультипликативных функционалов. Так, в случае колец C, $C^{(n)}$, W, A (примеры 1, 2, 3, 4) мультипликативный функционал представляет собой значение функции из кольца в фиксированной точке из соответствующей области определения (отрезка, окружности или круга). Таким образом, функция $x(t)$, не обращающаяся в нуль ни в одной точке, не принадлежит ни одному из максимальных идеалов соответствующего кольца, а потому и обратная к ней $\frac{1}{x(t)}$ также принадлежит к кольцу. В случае колец C, $C^{(n)}$ и A это утверждение тривиально. Однако в применении к кольцу W оно приводит к доказательству известной теоремы Винера: если функция $x(\theta)$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье и не обращается в нуль, то и $\frac{1}{x(\theta)}$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье. Идея, примененная для доказательства теоремы Винера, применяется и во многих других случаях.

В кольце V (пример 5) L_1 образует максимальный идеал. Все остальные максимальные идеалы в V могут быть описаны следующим образом. Пусть s — вещественное число и M_s — совокупность элементов $\lambda e + x \in V$, для которых

$$\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} x(t)\, dt = 0.$$

M_s образует максимальный идеал в V. Других максимальных идеалов, кроме L_1 и M_s $(-\infty < s < \infty)$, в кольце V не существует.

Элемент $\lambda e + x(t) \in V$ тогда и только тогда обратим, когда

$$\lambda \left(\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{ist} dt\right)$$

отлично от нуля при любом s.

Аналогичным образом могут быть описаны максимальные идеалы в кольцах $V^{<\alpha>}$ и $V_+^{<\alpha>}$ (примеры 7 и 8). Так, в случае кольца $V^{<\alpha>}$, кроме $L^{<\alpha>}$ имеются еще максимальные идеалы M_s указанного выше типа, но s теперь может быть любым комплексным числом, для которого

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln \alpha(t)}{-t} \leqslant \operatorname{Im} s \leqslant \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln \alpha(-t)}{t}.$$

В случае кольца $V_+^{<\alpha>}$ s — любое, для которого

$$\operatorname{Im} s \geqslant \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln \alpha(t)}{-t}.$$

Более сложно обстоит дело для кольца $V^{(b)}$ (пример 6). Однако и в этом случае описаны все максимальные идеалы (см. [9]).

5. Пространство максимальных идеалов. Множество $\mathfrak{M}$ всех мультипликативных функционалов на R замкнуто в слабой топологии $\sigma(R', R)$. Каждый мультипликативный функционал имеет норму 1, следовательно, $\mathfrak{M}$ есть замкнутое в топологии $\sigma(R', R)$ подмножество единичной сферы сопряженного пространства, которая в этой топологии компактна (см. гл. I, § 4, п. 4). Таким образом, $\mathfrak{M}$ есть компактное в слабой топологии $\sigma(R', R)$ множество ($\mathfrak{M}$ — бикомпакт) *). Это множество называют *пространством максимальных идеалов*.

Элементам кольца R часто бывает полезным сопоставить непрерывные функции на множестве $\mathfrak{M}$, полагая $x(M) = M(x)$ для $x \in R$, $M \in \mathfrak{M}$. Соответствие $x \longrightarrow x(M)$ есть не увеличивающий норму гомоморфизм R в кольцо $C(\mathfrak{M})$ всех непрерывных функций на бикомпакте $\mathfrak{M}$, наделенное обычной нормой (т. е. нормой $\|x\| = \sup\limits_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)|$). В случае, если соответствие изоморфное, R называют *кольцом функций*. Всегда

$$\max_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)| = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leqslant \|x\|.$$

Пересечение всех максимальных идеалов называется *радикалом* кольца. Для элементов радикала $x(M) \equiv 0$. Элементы x, для которых $\sqrt[n]{\|x^n\|} \longrightarrow 0$, называются *обобщенными нульстепенными элементами*. Радикал кольца совпадает с совокупностью всех обобщенных нульстепенных элементов.

Множество значений функции $x(M)$ на пространстве $\mathfrak{M}$ совпадает со *спектром элемента* x, т. е. со множеством тех комплексных чисел λ, для которых $x - \lambda e$ не имеет обратного в R.

Кольцо R, по определению, есть *прямая сумма* своих идеалов I_1 и I_2, если всякий элемент $x \in R$ может быть разложен (единственным способом) в сумму $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in I_1$, $x_2 \in I_2$.

Кольцо R тогда и только тогда есть прямая сумма своих идеалов, когда пространство $\mathfrak{M}$ несвязно, т. е. представляется в виде объединения двух непересекающихся замкнутых множеств.

---

*) Отделимое хаусдорфово компактное пространство называется *бикомпактом*.

6. Кольцевая граница пространства $\mathfrak{M}$. Наименьшее замкнутое подмножество $\Gamma \subset \mathfrak{M}$, на котором все функции $|x(M)|$ $(x \in R)$ достигают максимума, называется *кольцевой границей* пространства $\mathfrak{M}$ (Г. Е. Шилов). Такое множество существует и единственно. Например, в случае кольца A (пример 4) пространство максимальных идеалов $\mathfrak{M}$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие с кругом $|\zeta| \leqslant 1$; тогда кольцевая граница Γ состоит из точек, лежащих на границе $|\zeta| = 1$ этого круга. Этот и подобные примеры оправдывают название кольцевой границы. Если кольцо R изометрически вложено в некоторое более широкое кольцо R_1, то всякий непрерывный линейный функционал может быть продолжен до линейного непрерывного функционала над R_1. При этом свойство функционала быть мультипликативным может не сохраниться. Это означает, что не всякий максимальный идеал кольца R есть пересечение этого кольца с некоторым максимальным идеалом более широкого кольца R_1. Что же касается максимальных идеалов, соответствующих точкам границы Γ, то все они расширяются до максимальных идеалов любого более широкого кольца R_1. Если при этом норма в исходном кольце есть максимум модуля на $\mathfrak{M}$, то существует такое кольцо $R_1 \supset R$, до максимальных идеалов которого расширяются только максимальные идеалы, соответствующие точкам из Γ. Таким кольцом R_1 служит кольцо $C(\Gamma)$ всех непрерывных функций на Γ (в примере 4 — кольцо всех непрерывных функций на окружности $|\zeta| = 1$).

7. Аналитические функции в кольце. Функция x_λ со значениями в данном нормированном кольце R называется *аналитической*, если она определена в некоторой области комплексного переменного λ и отношение

$$\frac{x_{\lambda+h} - x_\lambda}{h}$$

сходится по норме к некоторому пределу $x'_\lambda \in R$ при $h \to 0$. Например, функция $(x - \lambda e)^{-1}$ является аналитической в дополнении к спектру элемента x.

На аналитические функции со значениями в кольце распространяется значительная часть элементарной теории обычных аналитических функций, в частности теорема Коши, интегральная формула Коши, теорема Лиувилля.

Если $f(\zeta)$ — целая функция, то в кольце R для всякого элемента x можно определить при помощи ряда Тейлора элемент $f(x)$. Этот элемент обладает тем свойством, что $f(x)(M)=f(x(M))$ для всех $M\in\mathfrak{M}$.

Интегральная формула Коши позволяет уточнить этот результат. Именно, *если x — некоторый элемент кольца и функция $f(\zeta)$ регулярна в окрестности спектра элемента x, то формула*

$$y=f(x)=\int\limits_{\gamma}(x-\lambda e)^{-1}f(\lambda)\,d\lambda,$$

где γ — любой спрямляемый контур, охватывающий спектр x и лежащий в области регулярности функции $f(\zeta)$, определяет некоторый элемент $y\in R$, для которого $y(M)=$ $=f(x(M))$.

В этом утверждении, если его сформулировать для кольца W, содержится обобщение упоминавшейся выше теоремы Винера, принадлежащее П. Леви.

Таким образом, к элементу x нормированного кольца можно применять всякую функцию $f(\zeta)$, регулярную в окрестности спектра x. Несмотря на то, что этот класс функций представляется тесным, уже в случае кольца W его, вообще говоря, нельзя расширить.

Интегральная формула Коши осуществляет гомоморфное отображение $f(\zeta)\longrightarrow f(x)$ кольца функций $f(\zeta)$, аналитических в окрестности спектра элемента x, в кольцо R.

Теория функций от элементов кольца имеет многочисленные применения. Например, теоремы типа Винера—Леви играют важную роль в построении теории регулярных и сингулярных интегральных уравнений.

Функцию $f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ от нескольких независимых переменных $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ также можно применять к совокупности $x_1, \ldots, x_n$ элементов нормированного кольца, если эта функция регулярна в окрестности совместного спектра элементов $x_1, \ldots, x_n$, т. е. в окрестности множества (в n-мерном комплексном пространстве)

$$\{(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\colon \zeta_1=x_1(M), \ldots, \zeta_n=x_n(M),\ M\in\mathfrak{M}\}.$$

8. Инвариантные подпространства R'. Пусть R' — сопряженное пространство к нормированному кольцу R. Подпространство $P\subset R'$ называется *инвариантным*, если из соотношения $f \in P$ следует, что при любом $x_0 \in R$ функционал $f_{x_0}(x) = f(x_0 x)$ также принадлежит P.

Если I — идеал R, то его ортогональное дополнение (см. гл. I, § 4, п. 5) будет инвариантным подпространством R', замкнутым в слабой топологии $\sigma(R', R)$. Обратно, всякое слабо замкнутое инвариантное подпространство R' является ортогональным дополнением к некоторому идеалу кольца R.

Инвариантное подпространство, ортогональное к максимальному идеалу $M \subset R$, одномерно и состоит из кратных функционала $M(x)$; верно и обратное. Поскольку каждый идеал содержится в максимальном идеале, каждое ненулевое слабо замкнутое инвариантное подпространство $P \subset R'$ содержит одномерное инвариантное подпространство.

Пусть, в частности, W' — пространство, сопряженное к винеровскому кольцу W (пример 3). Пространство W' можно отождествить с пространством всех ограниченных последовательностей $\{\ldots, f_{-1}, f_0, f_1, \ldots\}$, так, что если

$$x(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta} \in W,$$

то

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_k c_k.$$

Сформулированное выше утверждение относительно инвариантных подпространств в сопряженном пространстве приводит поэтому в применении к пространству W' к следующей теореме: *всякое слабо замкнутое подпространство пространства последовательностей, инвариантное относительно сдвигов, содержит подпоследовательность вида* $\{e^{ik\theta_0}\}$.

Всякое слабо замкнутое инвариантное подпространство $P \subset W'$, содержащее только одну последовательность $\{e^{ik\theta_0}\}$, одномерно и состоит из кратных этой последовательности.

9. Кольца с инволюцией. Нормированное кольцо называется *кольцом с инволюцией*, если в нем введена операция $x \longrightarrow x^*$, обладающая свойствами:

1) $(x^*)^* = x$,

2) $(\lambda x + \mu y)^* = \bar{\lambda} x^* + \bar{\mu} y^*$,

3) $(xy)^* = y^* x^*$.

Последнее свойство записано в таком виде, в котором оно распространяется на некоммутативные кольца. Наиболее важным примером некоммутативного кольца с инволюцией является кольцо ограниченных операторов в гильбертовом пространстве, в этом случае операция * представляет собою переход к сопряженному оператору.

Если инволюция обладает свойством

4) $\|x^*x\| = \|x^*\| \cdot \|x\|$,

то кольцо изоморфно и изометрично подкольцу кольца операторов в гильбертовом пространстве.

Коммутативное нормированное кольцо с инволюцией, обладающей свойством 4), *изоморфно и изометрично кольцу всех непрерывных функций на бикомпакте, служащем его пространством максимальных идеалов.*

Если эту теорему применить к кольцу операторов, коммутирующих со всяким оператором, который коммутирует с данным самосопряженным или нормальным оператором, то получается аналог спектрального разложения оператора.

Инволюция $x^* \longrightarrow x$ называется *симметричной*, если элемент $e + x^*x$ обратим при любом $x \in R$.

Линейный функционал f, определенный на кольце R с инволюцией, называется *положительным*, если $f(x^*x) \geqslant 0$ для всех $x \in R$.

Каждый положительный функционал на коммутативном нормированном кольце R с симметричной инволюцией однозначно продолжается до положительного линейного функционала на пространстве $C(\mathfrak{M})$ всех комплексных функций, непрерывных на пространстве $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов кольца R, и поэтому представим в виде

$$f(x) = \int_{\mathfrak{M}} x(M)\, d\mu(M),$$

где $\mu(M)$ — положительная мера на $\mathfrak{M}$.

Если для каждого ненулевого элемента $x_0 \in R$ существует положительный функционал f_0 такой, что $f_0(x_0 x_0^*) \neq 0$, то кольцо R не имеет радикала.

§ 2. Групповые кольца. Гармонический анализ

1. Групповое кольцо. Пусть G — группа с конечным числом элементов, и пусть R — линейная система, полученная из формальных линейных комбинаций элементов группы:

$$x = \sum_g x_g g \quad (x \in R),$$

где x_g — произвольные комплексные числа. В системе R естественным образом можно ввести операцию умножения элементов: если $x=\sum_g x_g g$ и $y=\sum_g y_g g$, то

$$xy=\Big(\sum_{g'} x_{g'} g'\Big)\Big(\sum_{g''} y_{g''} g''\Big)=\sum_{g'}\sum_{g''} x_{g'} y_{g''} g' g''.$$

Если обозначить произведение $g'g''=g$, то $g''=(g')^{-1}g$ и формула для умножения примет вид

$$xy=\sum_g \Big(\sum_{g'} x_{g'} y_{(g')^{-1}g}\Big) g.$$

При введенной операции умножения система R становится кольцом (алгеброй), которое называется *групповым кольцом* конечной группы G.

В дальнейшем рассматриваются коммутативные группы и для групповой операции применяется аддитивная запись. Формула для умножения записывается в виде

$$xy=\sum_g \Big(\sum_{g'} x_{g'} y_{g-g'}\Big) g.$$

Групповое кольцо коммутативной группы коммутативно. Формулу для умножения можно записать в координатной форме:

$$(xy)_g=\sum_{g'} x_{g'} y_{g-g'}.$$

Групповое кольцо становится конечномерным коммутативным нормированным кольцом, если ввести норму

$$\|x\|=\sum_g |x_g|.$$

При этом

$$\|xy\|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|.$$

Аналогично строится групповое кольцо дискретной коммутативной группы G с бесконечным числом элементов. Здесь удобнее элементы группового кольца R считать комплексно-значными функциями $x(g)$ от элементов группы. Умножение в R вводится по формуле

$$(xy)(g)=\sum_{g'} x(g')\,y(g-g'),$$

а норма — по формуле

$$\|x\| = \sum_g |x(g)|.$$

Кольцо R состоит из всех функций $x(g)$, для которых $\|x\| < \infty$. При этом оно будет уже бесконечномерным коммутативным нормированным кольцом.

При рассмотрении непрерывных групп в предыдущих формулах суммы заменяются интегралами. При этом предполагается, что на группе существует *инвариантный интеграл*, т. е. интеграл, обладающий свойством

$$\int x(g+g_0)\,dg = \int x(g)\,dg \text{ при любом } g_0 \in G.$$

Кольцо R представляет собой пространство $L_1(G)$ суммируемых функций $x(g)$ с нормой

$$\|x\| = \int |x(g)|\,dg$$

и с операцией умножения в виде свертки

$$(xy)(g) = \int x(g')\,y(g-g')\,dg'.$$

Групповое кольцо дискретной группы обладает единицей. Ею служит функция

$$e(g) = \begin{cases} 1, & \text{если } g=0, \\ 0, & \text{если } g \neq 0. \end{cases}$$

Кольцо $L_1(G)$ недискретной непрерывной группы не содержит единицы, так как функция $e(g)$ в $L_1(G)$ эквивалентна нулю. Поэтому групповым кольцом в этом случае называют кольцо $V(G)$, получаемое путем формального присоединения единицы к кольцу $L_1(G)$. Формально присоединенную единицу можно трактовать как δ-функцию на группе G (см. гл. VIII).

Частным случаем группового кольца является кольцо $V(-\infty, \infty)$ (пример 5), соответствующее группе G всех вещественных чисел.

В групповых кольцах можно ввести инволюцию. По определению $x^*(g) = \overline{x(-g)}$ и $e^* = e$ для единицы кольца.

Оказывается, что групповые кольца не имеют радикала, т. е. радикал их состоит лишь из нулевого элемента. Таким образом, групповое кольцо изоморфно кольцу функций на пространстве $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов.

2. Характеры дискретной группы и максимальные идеалы группового кольца. Характером дискретной группы G называется функция $\chi(g) \neq 0$, обладающая свойствами:

$$\chi(g+h) = \chi(g)\chi(h) \quad \text{и} \quad \chi^*(g) = \overline{\chi(-g)} = \chi(g).$$

Из определения следует, что $|\chi(g)| = 1$. Тривиальным характером является функция $\chi(g) \equiv 1$. Говорят, что группа G *имеет достаточное число характеров,* если для каждого $g_0 \in G$ найдется характер χ_0 такой, что $\chi_0(g_0) \neq 1$.

По характеру группы можно построить мультипликативный функционал на групповом кольце. Если группа дискретна, то мультипликативный функционал строится по формуле

$$M(x) = \sum_g x(g)\chi(g).$$

Оказывается, что это построение исчерпывает все мультипликативные функционалы группового кольца. Таким образом, между мультипликативными функционалами и характерами, а следовательно и между максимальными идеалами и характерами, устанавливается взаимно однозначное соответствие. Максимальный идеал M состоит из всех функций, ортогональных некоторому характеру:

$$\sum_g x(g)\chi(g) = 0.$$

Характер восстанавливается по максимальному идеалу по формуле

$$\chi(g_0) = M(e_{g_0}),$$

где $e_{g_0} = e_0(g-g_0) = \begin{cases} 1 \text{ при } g = g_0, \\ 0 \text{ при } g \neq g_0. \end{cases}$

Пространство $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов есть бикомпакт в слабой топологии, поэтому и пространство X характеров группы будет бикомпактом в соответствующей топологии. Эта топология определяется с помощью фундаментальной системы окрестностей элементов χ_0:

$$U(\chi_0, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon),$$

где $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — произвольный конечный набор элементов группового кольца и $\varepsilon > 0$. Характер χ принадлежит $U(\chi_0, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon)$, если

$$\left|\sum_g x_k(g)\left[\chi(g) - \chi_0(g)\right]\right| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Указанная топология совпадает с топологией, введенной Л. С. Понтрягиным с помощью фундаментальной системы окрестностей $U(\chi_0; F, \varepsilon)$, состоящих из характеров χ, для которых

$$|\chi(g) - \chi_0(g)| < \varepsilon$$

при $g \in F$. Здесь F пробегает любые конечные подмножества группы G.

В множестве характеров χ естественно вводится операция умножения: произведение $\chi_1(g)\chi_2(g)$ двух характеров группы будет снова характером группы. Операция умножения непрерывна в топологии пространства X.

Итак, *пространство характеров дискретной группы является бикомпактной топологической коммутативной группой.*

Простейшим примером дискретной группы является группа целых чисел $\{m\}$. Групповое кольцо состоит из последовательностей $x = \{c_m\}$ с законом умножения

$$(xy)_m = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} c_{m'} d_{m-m'}$$

и нормой

$$\|x\| = \sum |c_m|.$$

Это кольцо изоморфно и изометрично винеровскому кольцу W (пример 3). Характерами группы будут функции $e^{im\theta}$. При θ, отличающихся на целое кратное 2π, характеры совпадают, поэтому можно считать, что $0 \leqslant \theta < 2\pi$, и характеры изображать точками единичной окружности. Итак, группой характеров группы целых чисел является единичная окружность.

Мультипликативные функционалы строятся на формуле

$$M(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\theta}$$

и совпадают, как это отмечалось выше, со значениями функции винеровского кольца в точке θ.

3. Бикомпактные группы. Принцип двойственности. На бикомпактной группе существует инвариантный интеграл (см. [38]), поэтому для нее можно построить групповое кольцо $V(G)$. Элементы этого кольца имеют вид $\lambda e + x(g)$, где e—формально присоединенная единица, а $x(g) \in L_1(G)$. В кольце $V(G)$ имеется тривиальный максимальный идеал $M_\infty = L_1(G)$ и соответствующий ему мультипликативный функционал $M_\infty(\lambda e + x) = \lambda$.

Характеры группы определяются так же, как и для дискретной группы с дополнительным требованием непрерывности. Характер определяет мультипликативный функционал по формуле

$$M(\lambda e + x) = \lambda + \int x(g)\chi(g)\,dg.$$

Оказывается, что это построение дает возможность получить все нетривиальные максимальные идеалы. Пространство максимальных идеалов после отбрасывания одной точки M_∞ становится дискретным множеством. Таким образом, *группа характеров бикомпактной группы является дискретной группой.*

Бикомпактная группа имеет достаточное множество характеров, образующих на группе G полную ортогональную систему функций.

Если для группы характеров X построить ее группу характеров G', то она будет бикомпактной группой. Оказывается, что G' *изоморфно исходной группе* G. Изоморфизм задается равенством

$$\chi(x) = \varphi_x(\chi),$$

где φ_x—элемент группы G'. Топология в группе характеров G' совпадает с топологией исходной группы. Таким образом, группы G и G' можно отождествить.

Если рассмотреть дискретную группу G, ее группу характеров X и группу характеров G' группы X, то группы G и G' также изоморфны. Последние утверждения составляют содержание *принципа двойственности* Л. С. Понтрягина.

4. Локально бикомпактные группы. Группа G называется *локально бикомпактной*, если у нее существует бикомпактная окрестность нуля. На локально бикомпактной группе также существует инвариантный интеграл. Элементы группового кольца $V(G)$ имеют такой же вид, как и в случае бикомпактной группы.

Пространство максимальных идеалов после изъятия из него тривиального максимального идеала $M_\infty = L_1(G)$ перестает быть компактным. Таким образом, группа характеров локально бикомпактной группы сама является локально бикомпактной группой.

Локально бикомпактная группа имеет достаточное число характеров, для нее также справедлив принцип двойственности Л. С. Понтрягина.

Отличие от случая бикомпактной группы состоит еще в том, что характеры не принадлежат кольцу $L_1(G)$ и их следует рассматривать как элементы сопряженного пространства.

Простейшим примером локально бикомпактной группы является группа всех вещественных чисел: $-\infty < t < \infty$. Групповым кольцом является кольцо $V(-\infty, \infty)$ (пример 5). Характерами группы являются функции e^{ist} при любом вещественном s. Группа характеров также является группой вещественных чисел. Представление элемента группового кольца в виде функции на пространстве максимальных идеалов

$$x(M_s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{ist}\, dt$$

соответствует переходу от функции из $L_1(-\infty, \infty)$ к ее преобразованию Фурье.

Аналог преобразования Фурье можно строить на любой локально бикомпактной группе с помощью ее характеров.

5. Преобразование Фурье. *Преобразованием Фурье* называется переход от функции на группе G к функции на ее группе характеров X по формуле

$$Tx(\chi) = \int_G x(g)\, \chi(g)\, dg.$$

Имеет место теорема единственности: *если преобразования Фурье двух функций совпадают, то сами функции совпадают почти при всех $g \in G$.*

Оператор T, рассматриваемый на пересечении пространств $L_1(G)$ и $L_2(G)$, допускает замыкание до оператора, изометрически отображающего пространство $L_2(G)$ на пространство $L_2(X)$. Обратный оператор на $L_1(X) \cap L_2(X)$ задается формулой

$$T^{-1}f(g) = \int f(\chi)\overline{\chi}(g)\,d\chi.$$

Важный класс функций на группе G образуют *положительно определенные функции*, т. е. такие функции $\varphi(g)$, что для любого конечного набора элементов $g_1, \ldots, g_n$ группы G и любых комплексных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_n$ выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \varphi(g_k - g_l)\,\overline{\xi}_k\xi_l \geqslant 0.$$

По каждой положительно определенной функции на группе можно построить линейный положительный функционал на групповом кольце по формуле

$$f_\varphi(\lambda e + x) = \lambda\varphi(0) + \int x(g)\,\varphi(-g)\,dg.$$

Каждый положительный функционал f на $V(G)$ представим в виде

$$f(\lambda e + x) = \lambda\varrho + f_\varphi(\lambda e + x),$$

где φ — однозначно определяемая по функционалу f положительно определенная функция на G, а $\varrho > 0$.

Из теоремы о представлении положительного функционала (см. § 1, п. 8) следует теорема о представлении положительно определенной функции на группе: *непрерывная функция на коммутативной локально бикомпактной группе G положительно определена тогда и только тогда, когда она есть преобразование Фурье неотрицательной меры (определяемой по φ однозначно) на группе характеров:*

$$\varphi(g) = \int_X \overline{\chi}(g)\,d\Phi(\chi).$$

6. Гиперкомплексные системы. Более общим объектом, чем групповые кольца, являются *гиперкомплексные системы*. В конечномерном случае гиперкомплексные системы являются линейными системами с заданным законом перемножения элементов базиса этой системы:

$$e_i e_j = \sum_k c_{ijk} e_k.$$

Здесь, в отличие от случая группового кольца, произведение элементов базиса может, не являясь элементом базиса, быть некоторым элементом кольца. Константы c_{ijk} (называемые *структурными*) должны обладать свойствами, обеспечивающими необходимые свойства операций в кольце. Если $c_{ijk} = c_{jik}$, то гиперкомплексная система коммутативна.

Формула для перемножения элементов $x = \{x_i\}$ и $y = \{y_i\}$ гиперкомплексной системы имеет вид

$$(xy)_k = \sum_{i,j} x_i y_j c_{ijk}.$$

Эта формула может рассматриваться как обобщение формулы свертки для группового кольца.

В непрерывном случае роль базиса играет некоторое топологическое пространство Q, элементами гиперкомплексной системы являются функции на Q, умножение задается с помощью обобщенной свертки.

При определенных условиях, накладываемых на структурные константы c_{ijk} в дискретном случае и на структурную меру в непрерывном случае, удается ввести аналог понятия инвариантной меры, характеров и изучить кольца суммируемых по этой мере функций столь же детально, как и групповые кольца.

Теория этого класса колец позволяет изучать разложения по решениям уравнения Штурма — Лиувилля и по некоторым классам ортогональных многочленов.

§ 3. Регулярные кольца

1. Регулярное кольцо. *Регулярным* называется кольцо R без радикала (т. е. кольцо функций), в котором для любого замкнутого множества $F \subset \mathfrak{M}$ и любой не содержащейся в F точки $M_0 \in \mathfrak{M}$ найдется такая функция $x(M)$ $(x \in R)$, что $x(M) = 0$ для всех $M \in F$ и $x(M_0) = 1$. Всякое регулярное кольцо *нормально*, т. е. аналогичное свойство отделимости выполняется для любой пары непересекающихся замкнутых множеств. Более того, в регулярном кольце для любого конечного открытого покрытия $\{V_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, пространства $\mathfrak{M}$ имеется «разбиение единицы», т. е. система функций $x_1(M), \ldots, x_n(M)$, для которых

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(M) \equiv 1$$

и

$$x_i(M) = 0 \qquad \text{при} \qquad M \overline{\in} V_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Функция $f(M)$, по определению, ***локально принадлежит*** кольцу R, если для каждой точки $M_0 \in \mathfrak{M}$ существует такая окрестность, в которой эта функция совпадает с некоторой функцией из кольца. Наличие разбиения единицы для всякого конечного открытого покрытия пространства $\mathfrak{M}$ позволяет установить, что всякая непрерывная функция, локально принадлежащая кольцу, сама является элементом этого кольца. Элемент кольца называется вещественным, если функция $x(M)$ вещественна.

Достаточное условие регулярности: *кольцо с вещественными образующими* (см. § 1, п. 1) *регулярно, если*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln \| e^{itz} \| \frac{dt}{1+t^2} < \infty$$

для каждой его вещественной образующей z.

Кольца $C(0, 1)$, $C^{(n)}(0, 1)$, W, V регулярны. Кольцо A нерегулярно.

Среди идеалов нормированного кольца особый интерес представляют *примарные идеалы*, т. е. такие, которые содержатся только в одном максимальном идеале. В случае регулярного кольца функций в каждом максимальном идеале имеется наименьший замкнутый примарный идеал, а все остальные идеалы «зажаты» между ним и максимальным. Этот наименьший замкнутый примарный идеал $J(M_0)$ есть замыкание идеала, образованного из функций $y(M)$, равных нулю в некоторой (своей для каждого y) окрестности точки M_0.

В кольце V абсолютно сходящихся интегралов Фурье всякий максимальный идеал M, в том числе и $M_\infty = L_1(-\infty, \infty)$, совпадает с $J(M)$. Из последнего факта вытекает, в частности.

Тауберова теорема Винера. *Если преобразование Фурье $\tilde{x}_0(s)$ функции $x_0(t) \in L_1$ не обращается в нуль ни при каком вещественном значении s и если $f(t)$ — такая ограниченная измеримая функция, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_0(t-\tau) f(t)\, dt \to l \int_{-\infty}^{\infty} x_0(t)\, dt \quad \text{при} \quad \tau \to \infty,$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) f(t)\, dt \to l \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt \quad \text{при} \quad \tau \to \infty$$

для любой функции $x(t) \in L_1$.

Кольцо, у которого есть только один максимальный идеал, называется *примарным*. Фактор-кольцо по примарному идеалу является примарным кольцом. В кольце $C^{(n)}$ (пример 2) наименьший замкнутый примарный идеал $J(t_0)$, соответствующий максимальному идеалу, состоящему из функций, обращающихся в нуль в точке t_0, состоит из функций, равных нулю в этой точке t_0 вместе со всеми своими производными до порядка n. Фактор-кольцо $C^{(n)}/J(t_0)$ конечномерно и изоморфно кольцу $I^{(n)}$ с одной образующей X, $X^{n+1}=0$, и состоит из элементов вида

$$a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$$

с нормой

$$\| a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \| = \sum_{k=0}^{n} \frac{|a_k|}{k!}.$$

Пусть R' и R'' — регулярные кольца функций с одним и тем же пространством максимальных идеалов, причем $R' \subset R''$ и R' плотно в R''. Пусть J' и J'' — наименьшие замкнутые примарные идеалы в этих кольцах, отвечающие фиксированной точке $M_0 \in \mathfrak{M}$. Тогда кольцо вычетов R'/J' допускает естественный гомоморфизм в кольцо вычетов R''/J''. Если при этом кольцо вычетов R'/J' конечномерно, то кольцо вычетов R''/J'', как гомоморфный образ кольца R'/J', также конечномерно и имеет размерность не выше, чем размерность R'/J'.

Например, если R есть кольцо функций на отрезке (или на окружности), содержащее все бесконечно дифференцируемые функции в качестве всюду плотного множества, то оно автоматически содержит кольцо $C^{(n)}$ и его фактор-кольцо по наименьшему замкнутому примарному идеалу конечномерно.

2. Замкнутые идеалы. Любому замкнутому идеалу $I \subset R$ отвечает замкнутое множество $F \subset \mathfrak{M}$, на котором все функции из I обращаются в нуль. Если в случае регулярного кольца зафиксировать замкнутое множество и рассмотреть совокупность всех идеалов, которым отвечает это множество, то среди них найдется наименьший $J(F)$; он состоит из функций, которые являются пределами (в смысле сходимости по норме) функций из кольца, обращающихся в нуль в некоторой окрестности множества F. Этот факт в ряде случаев позволяет описывать всевозможные замкнутые идеалы в регулярном кольце функций.

Так, в кольце C каждый замкнутый идеал есть пересечение максимальных; в кольце $C^{(n)}$ каждый замкнутый идеал есть пересечение примарных идеалов. Впрочем, задача описания всех замкнутых идеалов еще далека от своего окончательного решения даже в случае сравнительно простых нормированных колец. Например, до сих пор неизвестно, как устроены замкнутые идеалы в кольце W. Оказывается, даже в этом случае одно и то же замкнутое множество, если оно устроено достаточно сложно, может отвечать бесконечному числу различных вложенных друг в друга замкнутых идеалов. Описаны все замкнутые идеалы в кольце A (см. [9]).

3. Кольцо $C(S)$ и его подкольца. Пусть S — бикомпакт и $C(S)$ — кольцо всех непрерывных функций на бикомпакте S. Подкольцо K кольца $C(S)$ называется *симметричным*, если функции $x(t)$ и $\overline{x(t)}$ одновременно принадлежат или не принадлежат K, и *антисимметричным*, если из $x(t)$, $\overline{x(t)} \in K$, следует, что $x(t) = \mathrm{const}$.

Для того чтобы замкнутое симметричное подкольцо K, содержащее единицу, совпадало со всем кольцом $C(S)$, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух точек t_1, $t_2 \in S$ нашлась функция $x(t) \in K$ такая, что $x(t_1) \neq x(t_2)$.

Если за компакт S принять отрезок $[0, 1]$, то из сформулированного утверждения непосредственно следует теорема Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции многочленом. Если S—единичная окружность, то получается тригонометрическая форма теоремы Вейерштрасса. Таким образом, это утверждение является глубоким обобщением теоремы Вейерштрасса.

Для произвольного подкольца K кольца $C(S)$ существует разложение его в непрерывную сумму антисимметричных колец. С помощью этого разложения, например, задача об описании замкнутых идеалов кольца K сводится к задаче описания идеалов антисимметричных колец. Собственное замкнутое подкольцо кольца $C(S)$ может быть нормальным на S (т. е. разделять замкнутые подмножества S) и одновременно антисимметричным.

Пусть теперь S не бикомпакт, а некоторое вполне регулярное топологическое пространство (см. [38]).

Кольцо $C(S)$ всех непрерывных ограниченных функций на S будет также нормированным кольцом; каждая точка $t \in S$ будет порождать мультипликативный функционал и, следовательно, максимальный идеал. Пространство $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов кольца $C(S)$ будет содержать всюду плотную часть, гомеоморфную S. Пространство $\mathfrak{M}$ будет бикомпактным расширением S.

Пространства максимальных идеалов различных подколец кольца $C(S)$ могут давать другие бикомпактные расширения Q пространства S. Все такие замкнутые подкольца K могут быть охарактеризованы условиями:

1) если $x(t) \in K$, то и $\overline{x(t)} \in K$;

2) для любого множества $A \subset S$ и точки $t_0 \in S$, не входящей в его замыкание $\bar{A}$, имеется функция $x(t) \in K$, равная нулю на A и отличная от нуля при $t = t_0$.

ГЛАВА VII

ОПЕРАТОРЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

§ 1. Общие положения квантовой механики

1. Состояние и физические величины квантовомеханической системы. Здесь будет дано формальное описание логической схемы квантовой механики без изложения тех физических оснований, из которых эта схема возникает. В связи с этим вопросы, которые будут излагаться, в равной степени могут рассматриваться как задачи спектральной теории операторов в гильбертовом пространстве.

В квантовой механике состояние системы описывается элементом ψ комплексного бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространства H, которое называется *пространством состояний*. Элементы ψ называются *векторами состояния*.

Экспериментально определяемым физическим величинам, кратко называемым *наблюдаемыми*, соответствуют ограниченные самосопряженные операторы, действующие в пространстве состояний. Значение величины A в состоянии ψ дается квадратичной формой $(A\psi, \psi)$. Неограниченные самосопряженные операторы также имеют физический смысл. Наблюдаемыми являются любые ограниченные вещественные функции от этих операторов. Вследствие самосопряженности операторов, соответствующих наблюдаемым величинам, их возможные значения всегда вещественны.

Имеющая физический смысл квадратичная форма $(A\psi, \psi)$ остается инвариантной при одновременном унитарном преобразовании векторов состояния и операторов, соответствующих наблюдаемым величинам

$$\psi' \to U\psi, \qquad A' \to UAU^*,$$

2. Представления алгебраических систем. Пусть $\mathfrak{A}$ — система символов, между которыми установлен ряд формальных соотношений. Предполагается, что все эти соотношения могут быть записаны в виде равенств с помощью знаков сложения и умножения между символами и комплексными числами. Говорят, что построено *представление* системы $\mathfrak{A}$ в гильбертовом пространстве H, если каждому символу поставлен во взаимно однозначное соответствие линейный оператор, действующий в H, причем так, что все формальные равенства между символами переходят в тождественные равенства между операторами. При этом под сложением и умножением понимается сложение и умножение операторов, комплексному числу ставится в соответствие единичный оператор, умноженный на это число.

Если представления осуществляются с помощью неограниченных операторов, то соответствующие равенства должны тождественно выполняться на всех тех элементах, на которых определены обе части этих равенств.

Одним из весьма важных разделов теории групп является теория представлений групп в виде групп ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Чаще всего рассматриваются унитарные представления, так как все унитарные операторы образуют сами группу.

Пусть система операторов A, B, C, ... реализует представление системы $\mathfrak{A}$. Тогда система операторов UAU^{-1}, UBU^{-1}, UCU^{-1}, ..., где U — обратимый ограниченный оператор, также реализует представление системы $\mathfrak{A}$. Так построенные два представления называются *эквивалентными.* Если U — унитарный оператор $(U^{-1} = U^*)$, то представления называются *унитарно эквивалентными.*

Представление называется *неприводимым*, если любой ограниченный оператор, коммутирующий со всеми операторами представления, кратен единичному оператору. Если, например, пространство H разложено в прямую сумму двух подпространств, инвариантных относительно всех операторов представления, то эти операторы коммутируют с проекционными операторами на подпространства и, следовательно, представление приводимо.

3. Координаты и импульсы. В квантовой механике существенную роль играют символы q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, называемые *координатами*, и символы p_i ($i=1, 2, \ldots, n$), называемые *импульсами*. Между координатами и импульсами имеются *соотношения коммутации*. Если ввести обозначение $[a, b]=ab-ba$, то $[q_i, q_k]=0$, $[p_i, p_k]=0$, $[p_i, q_k]=ih\delta_{ik}$, где h — фундаментальная постоянная, называемая *постоянной Планка*, а $\delta_{ik}=0$ при $i\neq k$ и $\delta_{ii}=1$.

Оказывается, что существуют представления системы координат и импульсов в виде системы самосопряженных (неограниченных) операторов в гильбертовом пространстве. Если это пространство принять за пространство состояний, то введенные так координаты и импульсы приобретают физический смысл. Ограниченные функции от них становятся наблюдаемыми величинами.

Оказывается, что в заданном сепарабельном гильбертовом пространстве H все неприводнмые самосопряженные представления координат и импульсов унитарно эквивалентны. Как отмечалось в п. 1, при одновременном унитарном преобразовании векторов состояния и операторов имеющие физический смысл величины не изменяются. Поэтому нет никаких физических оснований предпочесть одно представление другому. В этом смысле говорят, что представление координат и импульсов единственно.

В случае $n=1$ (одномерный случай) в гильбертовом пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ представление координаты q и импульса p может быть реализовано операторами

$$qf=xf \qquad \text{и} \qquad pf=ih\frac{df}{dx}.$$

Это представление *приспособлено к оператору* q, так как он является оператором умножения на независимую переменную. Для краткости его называют *координатным* или *q-представлением*. Оно неприводимо.

Вот еще несколько примеров представлений, которые употребляются на практике. Если в q-представлении прибавить к оператору p оператор умножения на произвольную вещественную функцию $m(x)$, то соотношения коммутации не изменятся, т. е. операторы $q'=q$, $p'f(x)=pf(x)+m(x)f(x)$ реализуют представление. Унитарное преобразование операторов p и q в p' и q' соответственно осуществляется с помощью оператора умножения на функцию $\exp\left\{\frac{i}{h}\int\limits_{-\infty}^{x} m(t)\,dt\right\}$.

Менее тривиальный пример получится, если поменять ролями операторы p и q, т. е. рассмотреть представление

$$\tilde{q}f(x)=ih\frac{df}{dx}, \qquad \tilde{p}f(x)=xf(x)$$

в том же пространстве $L_2(-\infty, \infty)$. Это так называемое *импульсное* или *p-представление.* Операторы $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ связаны с p и q унитарным преобразованием:

$$\tilde{p}=UpU^*, \qquad \tilde{q}=UqU^*,$$

где U определяется с помощью преобразования Фурье:

$$Uf=g, \qquad g(x)=\left(\frac{1}{2\pi h}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{\frac{itx}{h}}\, dt.$$

В случае $n>1$ естественное представление, приспособленное к операторам $q_1, \ldots, q_n$, реализуется в пространстве квадратично интегрируемых функций $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, $-\infty<x_i<\infty$, причем q_i и p_i $(i=1, \ldots, n)$ являются операторами умножения и дифференцирования по соответствующим координатам. В описанном представлении значение координаты q_i в состоянии, характеризуемом функцией $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, дается выражением

$$(q_i\psi, \psi)=\int x_i\,|\psi(x_1, \ldots, x_n)|^2\, dx_1\ldots dx_n \qquad (i=1, \ldots, n).$$

Выражение $|\psi(x_1, \ldots, x_n)|^2$ имеет смысл плотности вероятности того, что координаты $q_1, \ldots, q_n$ системы имеют значение $x_1, \ldots, x_n$.

4. Оператор энергии. Уравнение Шредингера. В классической механике состояние динамической системы с n степенями свободы определяется заданием ее n обобщенных координат $q_1, \ldots, q_n$ и n обобщенных импульсов $p_1, \ldots, p_n$. Эволюция системы описывается *канонической системой* дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_k}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

где H—*функция Гамильтона* системы. Если система изолирована, то H не зависит от времени: $H=H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$.

Каждой классической динамической системе ставится в соответствие квантовомеханическая система. В некотором представлении координат и импульсов строится функция $H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ от соответствующих самосопряженных операторов q_i и p_i. Полученный таким образом линейный оператор H называется *оператором энергии* или также *гамильтонианом*. Обычно функция Гамильтона состоит из двух слагаемых, одно из которых зависит только от импульсов, а второе — только от координат. В этом случае не возникает вопроса о том, как определить однозначно функцию от некоммутирующих операторов. Например, в одномерном случае функция Гамильтона имеет вид

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2\mu} + V(q),$$

где $V(q)$ — потенциальная энергия, μ — масса частицы.

Следовательно, в q-представлении гамильтониан запишется так:

$$H = -\frac{h^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2} + V(x).$$

Оператор энергии H играет основную роль при описании развития со временем квантовомеханической системы. Существует два основных способа для этого описания. В первом из них (шредингерова картина) изменяются со временем векторы состояния, а операторы остаются неизменными. Развитие векторов состояния описывается уравнением

$$ih\frac{d\psi(t)}{dt} = H\psi(t),$$

которое называется *уравнением Шредингера*. Решение этого уравнения можно записать в виде (см. гл. III, § 2, п. 7)

$$\psi(t) = \exp\left\{-\frac{i}{h}H(t-t_0)\right\}\psi(t_0).$$

Оператор

$$U(t) = \exp\left\{-\frac{i}{h}Ht\right\}$$

унитарен и может применяться к любому состоянию ψ.

При втором способе (гайзенбергова картина) изменяются со временем операторы, а векторы состояния остаются неизменными. Развитие операторов со временем описывается

формулой
$$A(t) = U^*(t-t_0)\,A(t_0)\,U(t-t_0).$$

Имеющие физический смысл величины $(A\psi, \psi)$ изменяются одинаково при обоих способах описания.

Оператор $A(t)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:
$$-ih\frac{dA(t)}{dt} = [H, A] = HA - AH.$$

Гайзенберговой и шредингеровой картинам эквивалентны и другие способы описания развития системы со временем, при которых изменяются как операторы, так и векторы состояния. Если изменение операторов описывается унитарным оператором $V(t)$:
$$A(t) = V^*(t)\,A(0)\,V(t),$$
то изменение векторов состояния должно даваться формулой
$$\psi(t) = \tilde{U}(t)\,\psi(0) = V^*(t)\,U(t)\,\psi(0).$$

Имеющая физический смысл форма $(A\psi, \psi)$ во всех описаниях изменяется во времени одинаково.

Описанный переход от классической динамической системы к квантовомеханической называется *квантованием*.

5. Конкретные квантовомеханические системы. Основные системы, которые изучаются в нерелятивистской квантовой механике, образованы взаимодействующими электронами в поле ядер или в других внешних полях. Классический электрон — это частица с тремя координатами. Классическая функция Гамильтона для системы n частиц с векторами координат $\boldsymbol{x}_k$ и импульсов $\boldsymbol{p}_k$ и массами m_k имеет вид
$$H(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{p}_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\boldsymbol{p}_k^2}{2m_k} + \sum_{i<j} V_{ij}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j) + \sum_{i=1}^{n} V_i(\boldsymbol{x}_i).$$

Здесь $V_{ij}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)$ — потенциал взаимодействия между i-й и j-й частицами и $V_i(\boldsymbol{x}_i)$ — потенциал взаимодействия i-й частицы с внешним полем.

Оператор энергии соответствующей квантовомеханической системы в координатном представлении, т. е. в представлении, приспособленном к координатам $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, определяется дифференциальным оператором в пространстве функций $3n$ переменных вида

$$H = -\sum_{i=1}^{n} \frac{h^2}{2m_i}\Delta_i + \sum_{i<j} V_{ij}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j) + \sum_{i=1}^{n} V(\boldsymbol{x}_i),$$

где Δ_i — операторы Лапласа. Это дифференциальное выражение называется *оператором Шредингера*.

Конечно, точное изучение сколько-нибудь сложной системы встречает почти непреодолимые трудности. При приближенных подходах большую роль играют более простые модельные задачи. Из них важнейшей является задача о взаимодействии одной частицы с центром. Соответствующий оператор энергии имеет вид

$$H_s = -\frac{h^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{x}).$$

В частности, к этой задаче сводится задача о взаимодействии двух частиц без внешнего поля.

Математически сколько-нибудь подробно изучена только эта задача. Различные конкретные задачи приводят к различным предположениям относительно поведения потенциала $V(\boldsymbol{x})$. Задача значительно упрощается в случае, когда $V(\boldsymbol{x})$ допускает разделение переменных. Простейшие случаи, когда такое разделение возможно, таковы:

1) $V(\boldsymbol{x}) = V(z)$,

где z — одна из координат вектора $\boldsymbol{x}$.

Задача сводится к изучению оператора

$$H_1 = -\frac{h^2}{2m}\frac{d^2}{dz^2} + V(z)$$

в пространстве функций на оси $-\infty < z < \infty$.

2) $V(\boldsymbol{x}) = V(|\boldsymbol{x}|) = V(r), \quad |\boldsymbol{x}| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$.

Задача сводится к изучению оператора

$$H_l = \frac{h^2}{2m}\left(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right) + V(r)$$

в пространстве функций на полуоси $0 \leqslant r < \infty$ при фиксированных целых l, $l \geqslant 0$, причем в случае $l = 0$ ставится граничное условие $\psi(0) = 0$.

В дальнейшем указанные операторы H_3, H_1 и H_l называются соответственно трехмерным, одномерным и радиальным операторами Шредингера.

6. Переход от квантовой механики к классической. При квантовании каждой классической системе однозначно соответствует квантовомеханическая система.

С другой стороны, классическая механика является предельным случаем квантовой при $h \to 0$. Под этим понимается, что в некотором представлении операторы квантовой механики при $h \to 0$ переходят в операторы умножения на функции, соответствующие величинам классической механики. При этом операторы координат переходят в операторы умножения на координаты x_i, операторы импульсов — в операторы умножения на классические импульсы $p_{i\text{кл}}$ или, что то же, на количества движения, оператор энергии — в оператор умножения на константу E, равную полной энергии системы. Для одной точки в потенциальном поле классические координаты, импульсы и энергия связаны законом сохранения механической энергии:

$$\frac{p_{\text{кл}}^2}{2\mu} + V(x) = E.$$

Так как $p_{\text{кл}} = \mu\dot{x}$, то классическое время выражается через $p_{\text{кл}}$ формулой

$$\tau = \mu \int \frac{dx}{p_{\text{кл}}}.$$

Оператор $e^{\frac{i}{h}Ht}$ ни в q-, ни в p-представлении не имеет предела при $h \to 0$. Те представления, в которых оператор $e^{\frac{i}{h}Ht}$ имеет предел при $h \to 0$, называются *квазиклассическими*.

В одномерном случае в предположении, что потенциал $V(x)$ является ограниченной функцией, квазиклассическое представление можно получить с помощью оператора умножения на функцию

$$M(t) = \sqrt{p_{\text{кл}}}\, e^{\frac{i}{h}\left[\int p_{\text{кл}} dx + Et\right]},$$

где E — константа бо́льшая, чем $V(x)$.

Этот оператор является унитарным оператором, действующим из пространства L_2 в пространство $\tilde{L}_2$, где норма определяется по формуле

$$\|f\|_{\tilde{L}_2} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \frac{\mu}{p_{\text{кл}}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x(\tau))|^2 d\tau.$$

В так построенном квазиклассическом представлении основные операторы будут выглядеть следующим образом:

$$M(t)\, x M^{-1}(t) = x,$$

$$M(t)\, pM^{-1}(t) = p_{\text{кл}} - 2ih\sqrt{p_{\text{кл}}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{p_{\text{кл}}}},$$

$$M(t)\, HM^{-1}(t) = E - ih\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{h^2}{2\mu}\sqrt{p_{\text{кл}}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{\sqrt{p_{\text{кл}}}},$$

$$M(t)\, e^{\frac{i}{h}Ht} M^{-1}(0) = \exp\left\{t\frac{\partial}{\partial \tau} + t\frac{ih}{2\mu}\sqrt{p_{\text{кл}}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{\sqrt{p_{\text{кл}}}}\right\}.$$

Как видно из формул, операторы квантовой механики при $h \to 0$ переходят в операторы классической механики, при этом оператор $e^{\frac{i}{h}Ht}$ переходит в оператор

$$Q_t = e^{t\frac{\partial}{\partial \tau}},$$

который является оператором сдвига вдоль классической траектории

$$Q_t \varphi(\tau) = \varphi(t + \tau).$$

Общее уравнение Шредингера

$$ih\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2\mu}\Delta\psi + V(x)\psi, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n),$$

можно записать в квазиклассическом представлении, если существует n-параметрическое семейство решений $x(\alpha, t)$ $(\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$ уравнений Ньютона

$$\mu \ddot{x}_i = -\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

После замены

$$\psi = \varphi \sqrt{J} \exp \frac{i}{h} S,$$

где J — якобиан от α к x $\left(J = \frac{\partial(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right)$, а S — некоторая функция, играющая в механике роль действия, уравнение Шредингера приводится к виду

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} S \cdot \operatorname{grad} \varphi = \frac{ih}{2\mu} J^{-\frac{1}{2}} \Delta (J^{\frac{1}{2}} \varphi).$$

Здесь левая часть есть производная по времени вдоль классической траектории. При $h = 0$ решение уравнения будет постоянно вдоль классической траектории. В этом представлении оператор $e^{\frac{i}{h}\hat{H}t}$ также переходит при $h \to 0$ в оператор сдвига вдоль классической траектории.

Если перейти к переменным α и t, то

$$\varphi(x, t) = \varphi(x(\alpha, t), t) = \tilde{\varphi}(\alpha, t)$$

и уравнение принимает вид

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t} = \frac{ih}{2\mu} J^{-\frac{1}{2}} \Delta_\alpha [J^{\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}(\alpha, t)],$$

где Δ_α — оператор Лапласа в координатах α. Преобразование, переводящее $\psi(x, t)$ в $\tilde{\varphi}(\alpha, t)$, унитарно, так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\varphi}|^2 \, d\alpha.$$

Оно осуществляет переход от координатного представления к квазиклассическому.

§ 2. Самосопряженность и спектр оператора энергии

1. Критерий самосопряженности. Когда в § 1, п. 5 приводились примеры операторов энергии для конкретных квантовомеханических систем, то они выписывались в виде формальных дифференциальных выражений (операторов Шредингера). Однако в общей теории оператор энергии должен являться самосопряженным оператором, поэтому нужно описать области определения соответствующих операторов энергии. Оператор Шредингера на множестве D' достаточно гладких финитных функций определяет симметрический оператор H^0. Говорят, что оператор Шредингера *существенно самосопряжен*, если замыкание оператора H^0 является самосопряженным оператором. Это замыкание H и будет *оператором энергии.*

Одним из наиболее общих критериев существенной самосопряженности оператора Шредингера является следующий:

Критерий Като. *Если при некоторых константах M и R потенциалы взаимодействия удовлетворяют условиям*

$$\int\limits_{|x|\leqslant R} |V_{ij}(x)|^2\,dx \leqslant M \quad \text{и} \quad |V_{ij}(x)| \leqslant M \text{ при } |x| \geqslant R$$
$$(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

а потенциалы внешнего поля удовлетворяют аналогичным условиям

$$\int\limits_{|x|\leqslant R} |V_i(x)|^2\,dx \leqslant M \quad \text{и} \quad |V_i(x)| \leqslant M \text{ при } |x| \geqslant R$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то оператор Шредингера — существенно самосопряженный оператор. Область определения оператора энергии будет совпадать с областью определения самосопряженного оператора, получаемого замыканием оператора

$$H^0 = -\sum_{i=1}^{n} \frac{h^2}{2m_i}\Delta_i^2$$

с множества финитных функций.

Требования, налагаемые в этом критерии на потенциалы, можно ослаблять в нескольких направлениях. Так, можно избавиться от требования ограниченности потенциалов сверху, заменив его, например, условием

$$V_{ij}(x) \geqslant -M, \quad V_i(x) > -M, \quad |x| \geqslant R \quad (i,\ j=1,\ \ldots,\ n).$$

Интегральные условия критерия допускают, чтобы в окрестности особых точек потенциалы имели особенности типа

$$V(x)_{x\to x_0} \cong \frac{a}{|x-x_0|^\gamma}$$

с показателем γ не больше 1,5. Результат теоремы о существенной самосопряженности сохранится, если $V(x)$ имеет степенные особенности с $\gamma < 2$. Конечно, при этих ослаблениях условий может не сохраниться второе утверждение теоремы Като относительно области определения оператора энергии.

Полностью отказаться от каких-либо ограничений на поведение потенциалов на бесконечности или в окрестности особых точек нельзя. Так, если в трехмерном операторе Шредингера

$$H_3 = -\Delta^2 + V(x)$$

$V(x) \longrightarrow -\infty$ (при $|x| \longrightarrow \infty$) так, что $V(x) \leqslant -M|x|^{2+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$), или $V(x)$ имеет особую точку типа $\frac{\alpha}{|x-x_0|^\gamma}$, где $\alpha < 0$ и $\gamma > 2$, то оператор H_3 не является существенно самосопряженным.

2. Характер спектра радиального оператора Шредингера. Зависимость характера спектра радиального оператора Шредингера

$$H_l\psi(r) = -\psi''(r) + \frac{l(l+1)}{r^2}\psi(r) + V(r)\psi(r), \quad \psi(0) = 0,$$

от поведения потенциала $V(r)$ изучена весьма подробно. Здесь приводится несколько простейших критериев, которые в то же время являются типичными.

а) Если $V(r) \longrightarrow \infty$ при $r \longrightarrow \infty$, то спектр — однократный дискретный.

б) Если $V(r) \longrightarrow a$ при $r \longrightarrow \infty$, то интервал $a < \lambda < \infty$ заполнен непрерывным спектром.

О характере непрерывного спектра можно сказать больше, если уточнить способ стремления к предельному значению.

в) Так, если

$$\int_0^\infty r|V(r)|dr < \infty,$$

то при $\lambda > 0$ имеется только однократный непрерывный лебегов спектр, а при $\lambda < 0$ может быть только конечное число отрицательных собственных значений, причем при $l > 0$ точка $\lambda = 0$ также может быть собственным значением.

При условии в) решения уравнения

$$\psi''(r) + \lambda\psi(r) = V(r)\psi(r) + \frac{l(l+1)}{r^2}\psi(r)$$

при $r \longrightarrow \infty$ асимптотически ведут себя, как решения уравнения с $V(r) \equiv 0$, т. е. при $l = 0$ — как тригонометрические функции, а при $l > 0$ — как цилиндрические функции с полуцелым индексом. Например, при $l = 0$ в качестве линейно независимых решений уравнения можно взять

$$f_1(r, \lambda) \cong e^{i\sqrt{\lambda}r}, \qquad f_2(r, \lambda) \cong e^{-i\sqrt{\lambda}r} \qquad (r \to \infty).$$

При $\lambda > 0$ оба этих решения ограничены и только одна их линейная комбинация удовлетворяет краевому условию $\psi(0) = 0$. Эти факты и обусловливают описанный выше характер спектра соответствующего радиального оператора Шредингера.

г) В предыдущем примере коэффициент $V(r)$ при $r \to \infty$ убывал, грубо говоря, быстрее, чем $\frac{1}{r^2}$. Если $V(r)$ убывает медленнее, чем $\frac{1}{r^2}$, то предыдущий результат о непрерывном спектре может сохраниться, однако дискретный спектр может стать бесконечным. Хорошо известный пример кулоновского поля $V(r) = -\frac{c}{r}$ дает иллюстрацию этого положения.

д) Если $V(r) \to -\infty$ (при $r \to \infty$), причем $\int\limits_1^\infty \frac{dr}{|V(r)|^{1/2}} = \infty$, то вся ось $-\infty < \lambda < \infty$ занята непрерывным спектром.

3. Характер спектра одномерного **оператора Шредингера.** Для одномерного оператора

$$H_1\psi(z) = -\frac{d^2}{dz^2}\psi(z) + V(z)\psi(z)$$

многие критерии о строении спектра можно получить из соответствующих критериев для радиального оператора при $l = 0$. Однако кратность спектра может удвоиться.

а) Пусть

$$V(z) \to a \quad (\text{при } z \to -\infty), \qquad V(z) \to b \quad (\text{при } z \to \infty)$$

(для определенности полагается, что $b > a$), причем

$$\int\limits_{-\infty}^{0} (1 + |z|)\,|V(z) - a|\,dz < \infty,$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} (1 + |z|)\,|V(z) - b|\,dz < \infty.$$

Спектр оператора H_1 имеет следующую структуру: интервал $b < \lambda < \infty$ заполнен двукратным непрерывным лебеговым спектром; при $a<\lambda<b$ имеется однократный непрерывный лебегов спектр, и при $\lambda<a$, возможно, имеется конечное число простых дискретных собственных значений, причем если имеется область, где $V(z)<a$, то по крайней мере одно собственное значение обязательно присутствует. В связи с последним фактом говорят, что в одномерном случае любая потенциальная яма, как бы мала она ни была, обязательно содержит дискретный уровень.

б) $V(z)\to\infty$ при $|z|\to\infty$. Спектр в этом случае — однократный дискретный. Типичный пример — гармонический осциллятор. В этом случае $V(z)=z^2$ и дискретные уровни образуют арифметическую прогрессию.

в) Потенциал $V(z)$ — периодический: $V(z+1)=V(z)$. В этом случае двукратный непрерывный лебегов спектр заполняет отдельные интервалы положительной части вещественной оси. Эти полосы спектра совпадают с так называемыми зонами устойчивости для классического движения в рассматриваемом периодическом поле.

4. Характер спектра трехмерного оператора Шредингера. О строении спектра трехмерного оператора Шредингера

$$H_3\psi(x)=-\Delta^2\psi(x)+V(x)\psi(x)$$

можно сделать ряд заключений, сходных с теми, которые были сделаны для радиального оператора.

а) Если область, где выполняется условие $V(x)-\lambda<0$, конечна, то λ или точка дискретного спектра оператора H_3, или принадлежит его резольвентному множеству, причем левее точки λ может располагаться только дискретный спектр этого оператора.

б) Если $V(x)\to\infty$ при $|x|\to\infty$, то спектр чисто дискретный.

в) Если $V(x)\to a$ при $|x|\to\infty$, то вся полуось $a<\lambda<\infty$ заполнена непрерывным спектром.

Как и раньше, о строении непрерывного спектра можно сказать больше, если уточнить характер стремления потенциала к предельному значению.

г) Так, если $V(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$, причем

$$V(x)=O\left(\frac{1}{|x|^2+\varepsilon}\right),\quad \varepsilon>0,$$

то полуось $0<\lambda<\infty$ заполнена только непрерывным лебеговым спектром, а при $\lambda \leqslant 0$ может быть только конечное число дискретных собственных значений конечной кратности. Непрерывный спектр бесконечно вырожден, однако можно полностью разобраться в строении собственных функций непрерывного спектра. Именно, в полном наборе собственных функций имеется в точности одна функция $u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k})$, соответствующая каждой плоской волне $\exp\{i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})\}$, $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{3} k_j x_j$. Конечно, можно выбирать различные наборы собственных функций, при этом функции одного набора будут выражаться как линейные комбинации функций другого набора.

Для общего оператора энергии не существует столь просто формулируемых критериев строения спектра. Математической причиной этого факта является существенно различное асимптотическое поведение потенциального члена в различных направлениях в конфигурационном пространстве. Существует целый ряд доказанных строго или ясных с физической точки зрения критериев строения как дискретного, так и непрерывного спектра оператора H.

§ 3. Дискретный спектр, собственные функции

1. Точные решения. Одной из основных задач квантовой механики является нахождение собственных значений и собственных функций оператора энергии. В настоящем параграфе будут описаны основные приближенные методы, применяемые для решения этой задачи.

Прежде всего, надо заметить, что задача на нахождение собственных значений и собственных функций одномерного уравнения

$$-\frac{h^2}{2\mu}\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + V(x)\,\psi_n = E_n\psi_n$$

для некоторых потенциалов $V(x)$ решается точно.

1. Гармонический осциллятор: $V(x) = \frac{\mu\omega^2 x^2}{2}$.

$$E_n = h\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\psi_n(x) = 1/\sqrt{x_0}\, e^{-\xi^2/2} H_n(\xi),$$

где $x_0 = \sqrt{h/\omega\mu}$, $\xi = x/x_0$, H_n — полиномы Чебышева—Эрмита.

2. Потенциал Морзе: $V(x) = V_0\left(e^{-\frac{2x}{a}} - 2e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

Число собственных чисел (уровней энергии) конечно;

$$-E_n = V_0\left[1 - \frac{h}{a\sqrt{2\mu V_0}}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]^2, \quad n+2 < \frac{\sqrt{2\mu V_0}a}{h}, \quad n \geqslant 0,$$

$$\psi_n(x) = e^{-\frac{\xi}{2}}\xi^s F(-n,\ 2s+1,\ \xi),$$

где $\xi = \frac{2\sqrt{2\mu V_0}a}{h}e^{-\frac{x}{a}}$, $s = \frac{a\sqrt{-2\mu E_n}}{h}$, а F — вырожденная гипергеометрическая функция (см. [27]).

3. $V(x) = V_0 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{a}$.

$$E_n = \frac{\pi^2 h^2}{2\mu a^2}(n^2 + 2ns - s) \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где $s = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8\mu V_0 a^2}{\pi^2 h^2}}\right)$;

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \left(\sin\frac{\pi x}{a}\right)^{-2s}\cos\frac{\pi x}{a}\,F\left(\frac{-n-s+1}{2},\ \frac{n+1}{2},\ \frac{3}{2},\ \cos^2\frac{\pi x}{a}\right) & \text{при } n \text{ четном}, \\ \left(\sin\frac{\pi x}{a}\right)^{-2s}F\left(-\frac{n+s}{2},\ \frac{n}{2},\ \frac{1}{2},\ \cos^2\frac{\pi x}{a}\right) & \text{при } n \text{ нечетном}; \end{cases}$$

F — гипергеометрическая функция (см. [27]). В частности, при $a = \pi h/\sqrt{2\mu}$ и $V_0 = 2$

$$E_n = n^2 - 2, \quad \psi_n(x) = n\cos\frac{n\pi x}{a} - \sin\frac{n\pi x}{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{a}, \quad n \geqslant 1.$$

4. $V(x) = -\dfrac{V_0}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}}$.

Число уровней энергии конечно;

$$E_n = -\frac{h^2}{2\mu a^2}[s-n]^2 \qquad (0 \leqslant n < s),$$

где $s = \frac{1}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{8\mu V_0 a^2}{h^2}}\right]$;

$$\psi_n(x)=\begin{cases}\operatorname{ch}^{-2s}\dfrac{x}{2}F\left(\dfrac{-s+\varkappa}{2},\ \dfrac{-s-\varkappa}{2},\ \dfrac{1}{2},\ -\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{a}\right) & \text{при } n \text{ четном,}\\ \operatorname{ch}^{-2s}\dfrac{x}{2}\operatorname{sh}\dfrac{x}{a}F\left(\dfrac{-s+\varkappa+1}{2},\ \dfrac{-s-\varkappa+1}{2},\ \dfrac{3}{2},\ -\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{a}\right) & \text{при } n \text{ нечетном,}\end{cases}$$

где $\varkappa=\dfrac{a\sqrt{-2\mu E_n}}{h}$.

В примерах 1 и 2 собственные значения удовлетворяют соотношению

$$\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{E_n-V(x)}\,dx=\frac{\pi h}{\sqrt{2\mu}}\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

где x_1 и x_2 — нули подкоренного выражения.

В примерах 3 и 4 собственные значения удовлетворяют соотношению

$$\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2\mu\left[E_n-V(x)\right]}\,dx=$$
$$=\pi h\left(n+\frac{1}{2}\right)+\left(\sqrt{1+\frac{8\mu V_0a^2}{h^2}}-\sqrt{\frac{8\mu V_0a^2}{h^2}}\right).$$

В радиально-симметрическом случае задача тоже иногда решается точно.

5. Кулоновский потенциал: $V(r)=-\dfrac{a}{r}$.

$$E_n=-\frac{a^2\mu}{2h^2}\frac{1}{n^2}\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\psi_{n,\,l}(x)=-\left\{c_n^3\frac{(n-l-1)!}{2n\,[(n+1)!]^3}\right\}^{1/2}e^{-\frac{\varrho}{2}}\varrho^l L_{n+1}^{2l+1}(\varrho),$$

где $c_n=\dfrac{2\mu}{h^2}\dfrac{a}{n}$, $\varrho=cr$, а L_{n+1}^{2l+1} — полиномы Лагерра.

6. Осциллятор: $V(r)=\frac{\mu\omega^2 r^2}{2}$.

$$E_{n,\,l}=\hbar\omega\left(2n+l+\frac{3}{2}\right) \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\psi_{n,\,l}(x)=r^l e^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}r^2} F\left(-n,\ l+\frac{3}{2},\ \frac{\mu\omega r^2}{\hbar}\right).$$

В последних двух примерах собственные значения удовлетворяют соотношению

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \sqrt{2\mu\left[E_n-V(r)-\frac{\hbar^2\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{2\mu r^2}\right]}\,dr=\pi\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

где r_1 и r_2 — нули подкоренного выражения.

2. Общие свойства решений уравнения Шредингера. В одномерном случае, если потенциал не имеет особенностей, дискретный спектр всегда простой. Как видно на примере осциллятора (пример 1), собственная функция $\psi_0(x)$ не имеет нулей, а $\psi_n(x)$ имеет n нулей. При этом все нули лежат в области $E_n \geqslant V(x)$. Это свойство сохраняется и для произвольного потенциала. Обычно $\psi_0(x)$ называют функцией основного состояния. Если потенциал симметричен относительно $x=0$, то $\psi_n'(0)=0$ при четном n и $\psi_n(0)=0$ при нечетном n. При $n\to\infty$, когда число нулей увеличивается, асимптотикой собственной функции в области $E_n-V(x)\geqslant 0$ будет служить синус:

$$\psi_n(x)\approx\frac{A}{\sqrt{p_{\text{кл}}}}\sin\left[\frac{1}{\hbar}\int\limits_{x_1}^{x} p_{\text{кл}}\,dx+\frac{\pi}{4}\right]$$

(A — нормировочная константа). В дальнейшем как в одномерном, так и в многомерном случаях предполагается, что эта область конечна.

Из примера 1 видно, что собственные функции гармонического осциллятора при $x\to\infty$ стремятся к нулю, как $e^{-\alpha x^2}$ ($\alpha>0$ — некоторая константа). В общем случае можно сказать, что собственные функции стремятся к нулю при $x\to\infty$ быстрее, чем

$$\exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{x}\sqrt{2\mu\,(V(x)-E_n)}\,dx\right].$$

Эта оценка сохраняется и в многомерном случае, только вместо $V(x)$ надо брать минимум $V(\boldsymbol{x})$ на сфере $|\boldsymbol{x}| = r$ и интеграл брать по r.

3. Квазиклассическое приближение для решений одномерного уравнения Шредингера. Уравнение Шредингера иногда пишется в виде

$$-\frac{h^2}{2\mu}\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + V(x)\psi_n = E_n\psi_n,$$

где $V(x) = V_0 f\left(\frac{x}{a}\right)$, a — характерный размер, V_0 — характерный потенциал.

Квазиклассическим приближением называется асимптотика собственных функций и собственных значений уравнения Шредингера при условиях

$$n \gg 1, \quad \frac{h}{\sqrt{V_0}\, a\sqrt{2\mu}} \ll 1,$$

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{h}{\sqrt{V_0}\, a\sqrt{2\mu}} \sim \text{const}.$$

Не уменьшая общности, можно положить $V_0 = 1$, $a = 1$ и искать асимптотику при $h \to 0$. Пусть область $E_n \geqslant V(x)$ является отрезком $[x_1, x_2]$, а $V(x)$ — достаточно гладкая функция. Точки x_1, x_2, ограничивающие эту область, называются точками поворота.

Первый член квазиклассической асимптотики собственных значений для уравнения Шредингера находится из *условия квантования Бора:*

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2\mu\,[E_n^{(1)} - V(x)]}\, dx = h\pi\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

$$E_n = E_n^{(1)} + O(h^2).$$

Обозначим среднее квадратичное функции $\Phi(\tau)$ за классический период $T = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E_n^{(1)} - V(x)}}$ через $\tilde{\Phi}$:

$$\tilde{\Phi}^2 = \int_0^T \Phi^2(x(\tau))\, d\tau = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\Phi^2(x)\frac{dx}{\sqrt{E_n^{(1)} - V(x)}}.$$

Тогда условие квантования может быть представлено в виде

$$\frac{\tilde{p}^2_{\text{кл}}}{2\mu} = \frac{h}{4}(2n+1)\pi.$$

Второй член асимптотики E_n равен

$$E_n^{(2)} = -\frac{h^2}{24\mu}\frac{1}{T}\frac{d^2\tilde{F}^2}{dE^2},$$

где $E = E_n^{(1)}$, а $F(x) = -V'(x)$ ($F(x)$ — сила),

$$E_n = E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + O(h^4).$$

Собственная функция $\psi_n(x)$ сходится в $L_2(-\infty, \infty)$ при $h \to 0$ и $E_n \to E$ к функции, равной

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{E_n^{(1)} - V(x)}}\cos\left[\frac{\sqrt{2\mu}}{h}\int\limits_{x_1}^{x}\sqrt{E_n^{(1)} - V(x)}\,dx - \frac{\pi}{4}\right]$$

при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ и равной нулю вне этого интервала.

Функция $\psi(x)$ является асимптотикой $\psi_n(x)$, равномерной по x на отрезке, заключенном внутри интервала $x_1 < x < x_2$. Вне этого интервала — например, при $x \geqslant x_2 + \delta$ — асимптотикой, равномерной по x, будет служить функция

$$\psi_n(x) = \frac{C}{\sqrt[4]{V(x) - E_n^{(1)}}}\,e^{-\frac{\sqrt{2\mu}}{h}\int\limits_{x_2}^{x}\sqrt{V(x) - E_n^{(1)}}\,dx}.$$

Если «связать твердо» два параметра n и h, т. е. положить

$$\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)\frac{h}{\sqrt{2\mu}} = \text{const} = \int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{E - V(x)}\,dx$$

(тем самым предполагая, что $h = h_{n_0}$ меняется дискретно при $n_0 \to \infty$), то $\psi_{n_0+k}(x)$ будет сходиться в среднем к действительной части функции *)

$$M(0)\,e^{\frac{2\pi i k\tau}{T}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

*) Функция $e^{\frac{2\pi k\tau}{T}i}$ является собственной функцней оператора Q_t сдвига по траектории (§ 1, п. 6).

где $M(t)$ и τ определены в § 1, п. 6. При этом собственное значение можно записать в виде

$$E_{n_0+k}=E+h\frac{2\pi k}{T}+O(h^2).$$

Иногда бывает полезна асимптотика собственных функций, равномерная на интервале, охватывающем одну или обе точки поворота. Эту асимптотику можно получить с помощью следующего правила.

Пусть x_1 — точка поворота, в которой не выполняются предыдущие асимптотические соотношения. Предположим, что для некоторой функции $V_1(x)$ уравнение

$$y''-V_1(x)\,y=0$$

решается точно, причем отношение $\dfrac{V_1(x_1-x)}{E_n-V(x)}$ аналитично в точке x_1 и стремится к единице при $x\to x_1$.

Тогда асимптотикой собственной функции, равномерной на интервале, охватывающем точку x_1, будет служить функция

$$\varphi_n(x)=\sqrt[4]{\frac{V_1[z(x)]}{E_n-V(x)}}\,Y(z(x)),$$

где $z(x)$ определяется из условия

$$\int\limits_0^{z(x)}\sqrt{V_1(x)}\,dx=\frac{\sqrt{2\mu}}{h}\int\limits_{x_1}^{x}\sqrt{E_n-V(x)}\,dx,$$

а $Y(x)$ — некоторое решение уравнения $y''-V_1(x)\,y=0$.

В частности, если $V(x_1)\neq 0$, а $V_1(x)=x$, то $Y(x)$ — функция Эйри (см. [27]) и

$$\varphi_n(x)=\sqrt[4]{\frac{\left(\dfrac{3\sqrt{2\mu}}{2h}\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt{E_n-V(x)}\,dx\right)^{2/3}}{E_n-V(x)}}\times$$
$$\times Y\left[\left(\frac{3\sqrt{2\mu}}{2h}\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt{E_n-V(x)}\,dx\right)^{2/3}\right].$$

Если область $E_n-V(x)\geqslant 0$ многосвязна в окрестности E и состоит из конечного числа односвязных отрезков $x_{1i}\leqslant x\leqslant x_{2i}$, $i=1, 2, \ldots, k$, тогда $E_n^{(1)}$ будет удовлетворять одному из уравнений

$$\sqrt{2\mu}\int\limits_{x_{1i}}^{x_{2i}}\sqrt{E_n^{(1)}-V(x)}\,dx=h\pi\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

а $E_n^{(2)}$ будет по-прежнему определяться формулой

$$E_n^{(2)} = -\frac{h^2}{24\mu T}\frac{d^2\widetilde{F^2}}{dE^2}, \quad F(x) = -V'(x).$$

Пусть для определенности $E_0^{(1)}$ удовлетворяет i-му уравнению и не удовлетворяет ни одному другому. Тогда $\psi_n(x)$ будет экспоненциально стремиться к нулю при $h \to 0$ в интервалах $x < x_{1i}$ и $x > x_{2i}$. Физически это означает, что при $h \to 0$ частица оказывается в одной из «впадин» потенциальной ямы $V(x)$.

4. Вычисление собственных значений в одномерном и радиально-симметрическом случаях. Здесь будет указан метод нахождения собственных значений одномерного и радиального уравнений Шредингера с заданной точностью.

Если потенциал $V(x)$ растет, как степень x, то приведенные в п. 3 *формулы для $E_n^{(1)}$ и $E_n^{(2)}$ служат асимптотикой и по одному лишь параметру* $n \gg 1$. В этом случае данные формулы оказываются удобными для конкретного подсчета собственных значений.

Так, для потенциалов $V(x) = x^4$ и $V(x) = x^6$ формула для $E_n^{(1)}$ при $n = 6$ дает уже 3 верных знака для энергии E_n, а вместе с поправкой $E_n^{(2)}$ — 6 знаков. При $n = 2$ формула для $E_n^{(1)}$ даст один верный знак, а вместе с поправкой — 3 знака.

Эти формулы не будут служить асимптотиками при $n \to \infty$ для потенциала с особенностями.

Приведем асимптотические формулы для радиально-симметрического случая. Первый член асимптотики при $n \to \infty$, при фиксированном l и потенциале, растущем, как степень r, находится из соотношения

$$\int_0^{r_1} \sqrt{E_n^{(1)} - V(r)}\, dr = \pi\left(n + \frac{3}{4} + \frac{l}{2}\right)\frac{h}{\sqrt{2\mu}},$$

где r_1 — нуль подкоренного выражения. Если $V'(0) = 0$, то второй член будет равен

$$E_n^{(2)} = -\frac{h^2}{2\mu T}\left\{\frac{1}{12}\frac{\partial^2\widetilde{F^2}}{\partial E^2} - l(l+1)\frac{\partial\widetilde{Fr^{-1}}}{\partial E}\right\}_{E=E_n^{(1)}}.$$

Найти значения E_n при малых n можно с помощью быстродействующей электронной вычислительной машины, исходя из того, что на ней легко решается задача Коши для уравнения второго порядка.

Решение уравнения

$$-\frac{h^2}{2\mu}\frac{d^2y}{dr^2}+\left[V(r)+\frac{h^2l(l+1)}{2\mu r^2}\right]y-Ey=0$$

с начальными условиями

$$y(0)=0, \qquad y'(0)=1$$

при $E=E_n$ равно (с точностью до нормировочной константы) собственной функции $\psi_n(r)$ радиального уравнения.

Решения этой задачи при r большем, чем наибольший из корней уравнения

$$E=V(r)+\frac{h^2l(l+1)}{2\mu r^2},$$

будут иметь разные знаки для значений $E=E^{(+)}$, где $E_{n-1}<E^{(+)}<E_n$, и $E=E^{(-)}$, где $E_n<E^{(-)}<E_{n+1}$.

На этом факте основан метод нахождения собственных значений для малых n (*баллистический метод*, или метод «стрельбы»).

Если после решения задачи для произвольного набора E_i (после «стрельбы») найдены указанные выше $E^{(+)}$ и $E^{(-)}$, то затем отрезок $[E^+, E^-]$ делится пополам и на машине определяется знак решения задачи при больших r для $E=\frac{E^++E^-}{2}$.

Пусть, например, получилось, что знаки для $E=E^+$ и $E=\frac{E^++E^-}{2}$ разные. Тогда весь процесс повторяется для отрезка $\left[E^+, \frac{E^++E^-}{2}\right]$. Такое деление продолжается до тех пор, пока не получится отрезок, величина которого не выходит за пределы заданной точности. Средняя точка этого отрезка и будет с заданной точностью совпадать с искомым собственным значением.

Аналогичным образом можно находить собственные значения одномерного уравнения с потенциалом, симметричным относительно точки $x=0$. При этом для четных n надо взять начальные условия:

$$y(0)=1, \qquad y'(0)=0.$$

5. Теория возмущений. Уравнение

$$-\frac{h^2}{2\mu}\Delta\psi_n + [V_0(x) + \varepsilon V_1(x)]\psi_n = E_n\psi_n,$$

где ε — малый параметр, называется *возмущенным уравнением*. При $\varepsilon = 0$ получится уравнение

$$-\frac{h^2}{2\mu}\Delta\varphi_n + V_0(x)\varphi_n = \lambda_n\varphi_n,$$

которое называется *невозмущенным*. Потенциал $\varepsilon V_1(x)$ называется *возмущением*.

Здесь рассматривается случай, когда спектр невозмущенного уравнения дискретный.

Если $V_0(x) > 0$ и $V_1(x)$ растет не быстрее $\sqrt{V_0(x)}$, то φ_n и E_n являются аналитическими функциями от ε (см. гл. II, § 3, п. 6):

$$E_n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mu_{n,k}, \qquad \psi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \varphi_{n,k}.$$

Значения $\mu_{n,k}$ и $\varphi_{n,k}$ можно найти, подставив эти разложения в возмущенное уравнение и приравняв коэффициенты при ε^k.

Каждому значению λ_n соответствует одно E_n, если собственное значение считается столько раз, какова его кратность.

Таким образом, если l — кратность λ_n, то считается, что

$$\lambda_n = \lambda_{n+i} \qquad (i = 1, \ldots, l-1).$$

Пусть P_n — проекционный оператор на подпространство собственных функций, соответствующих λ_n, а R_n — оператор $\sum\limits_{k\neq n} \frac{P_k}{\lambda_k - \lambda_n}$, который является резольвентой оператора H в точке λ_n. Ядро R_n будет

$$K(x, \xi) = \sum_{k\neq n} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(\xi)}{\lambda_k - \lambda_n}.$$

Формулы для E_n и ψ_n можно переписать так:

$$E_{n+i} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mu_{n+i,k}, \quad \psi_{n+i} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \varphi_{n+i,k} \quad (i = 0, 1, \ldots, l-1).$$

Здесь $\mu_{n+i,0}=\lambda_n$, а $\mu_{n+i,1}$ $(i=0, \ldots, l-1)$ равно i-му собственному значению оператора P_nVP_n; $\varphi_{n+i,1}$ равно собственной функции оператора P_nVP_n, соответствующей $\mu_{n+s,1}$.

Следующие члены рядов находятся из рекуррентных соотношений вида

$$\mu_k=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{k-1}V\varphi_0\,dx,$$

$$\varphi_k=R_n\Big\{\sum_{j=1}^{k}\mu_j\varphi_{j-1}-V\varphi_{k-1}\Big\}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}K(x,\ \xi)\Big\{\sum_{j=1}^{k}\mu_j\varphi_{j-1}-V\varphi_{k-1}\Big\}\,d\xi.$$

Здесь для простоты опущен индекс $n+i$.

Написанные рекуррентные соотношения часто применяются в физике в значительно более общих случаях, чем это указывалось выше.

Так, возмущение может иметь вид $\varepsilon V_1(x, \varepsilon)$, где $V_1(x, \varepsilon)$ остается ограниченным в каждой точке x при $\varepsilon\to 0$ и растет на бесконечности быстрее, чем $\sqrt{V_0(x)}$. При этом спектр возмущенного уравнения может быть как дискретным, так и непрерывным. Например, если

$$V_0(x)+\varepsilon V_1(x,\ a)=x^2e^{-\varepsilon x^3},$$

то при $\varepsilon=0$ спектр дискретный, а при $\varepsilon\neq 0$ — непрерывный. Кроме того, все интегралы в формулах для μ_k и φ_k расходятся.

Это происходит по следующей причине. При выводе уравнения Шредингера отбрасываются члены, учитывающие взаимодействие данной системы с окружающими. В связи с этим потенциал считается неограниченным. Малый параметр, которым пренебрегают, полагая систему изолированной, должен учитываться в теории возмущений неограниченными операторами.

При вычислении μ_k и φ_k интегралы надо брать по той области, в которой законно допущение об изолированности системы, а именно: величина $\varepsilon V_1(x, \varepsilon)$ в этой области должна быть меньше некоторой константы, не зависящей от ε.

Полученные таким образом значения μ_k и φ_k являются приближенными лишь для тех собственных функций, которые заметно отличны от нуля в рассматриваемой области. Точность приближения не может быть лучшей, чем величина собственной функции невозмущенного уравнения вблизи границы этой области (подробнее см. [32]).

§ 4. Решение задачи Коши для уравнения Шредингера

1. Общие сведения. Решение уравнения

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V(x)\psi=H\psi\ ^{*)}$$

с начальным условием

$$\psi(x, t)|_{t=0}=\delta(x-\xi)$$

называется *фундаментальным решением* или *функцией Грина* и обозначается $K(x, \xi, t)$.

Решение уравнения $\psi(x, t)$ с начальным условием

$$\psi(x, 0)=f(x),$$

где $f(x)$ — функция с интегрируемым квадратом, может быть записано в виде

$$\psi(x, t)=\int_{-\infty}^{\infty} K(x, \xi, t) f(\xi)\, d\xi,$$

причем $\|\psi(x, t)\|=\|f(x)\|$. Ядро $K(x, \xi, t)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, \xi', t_2) K(\xi', \xi, t_1)\, d\xi'=K(x, \xi, t_1+t_2)\ ^{**)}.$$

В случае дискретного спектра

$$K(x, \xi, t)=\sum_n \psi_n(x)\overline{\psi}_n(\xi)\, e^{-\frac{E_n t}{h}}.$$

Решение уравнения с правой частью

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-V(x)\psi=F(x, t),$$

с начальным условием $\psi(x, t)|_{t=0}=f(x)$ может быть

---

*) Для простоты мы будем рассматривать одномерный случай. Все результаты автоматически переносятся на многомерный случай.

**) Две последние формулы вытекают из унитарности оператора $e^{\frac{i}{h}Ht}$, ядром которого служит $K(x, \xi, t)$.

представлено в виде

$$\psi(x, t) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, \xi, t) f(\xi)\, d\xi - \frac{i}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{t} K(x, \xi, t-\tau) F(\xi, \tau)\, d\tau\, d\xi.$$

При этом

$$\left\| \psi(x, t) - \int_{-\infty}^{\infty} K(x, \xi, t) f(\xi)\, d\xi \right\| \leqslant \frac{C}{h} \| F(x, t) \|,$$

где C — некоторая константа, не зависящая от $F(x, t)$, $f(x)$ и h.

2. Теория возмущений. Решение $\psi(x, t)$ уравнения с возмущением $\varepsilon W(x, t)$

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi + \varepsilon W(x, t)\, \psi$$

может быть с помощью формулы для решения уравнения с правой частью сведено к решению интегрального уравнения

$$\psi(x, t) = \psi^0(x, t) - \frac{\varepsilon i}{h} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x, \xi, t-\tau)\, W(\xi, \tau)\, \psi(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau,$$

где $\psi^0(x, t)$ — решение задачи при $\varepsilon = 0$. Метод последовательных приближений для этого уравнения называется методом нестационарной теории возмущений.

Первый член теории возмущений равен

$$\frac{i\varepsilon}{h} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x, \xi, t-\tau)\, W(\xi, \tau)\, \psi^0(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau.$$

Пример. Пусть спектр оператора H дискретный. Примем за начальную $\psi_k(x)$ — k-ю собственную функцию оператора H (физически это означает, что частица в начальный момент находится на k-м уровне энергии). При таком начальном условии $\psi^0(x, t)$ равно

$$\psi^0(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, \xi, t)\, \psi_k(\xi)\, d\xi = \psi_k(x)\, e^{-\frac{iE_n t}{h}}.$$

Первый член теории возмущений равен

$$\frac{i\varepsilon}{h} \sum_n \psi_n(x)\, e^{-\frac{iE_n t}{h}} \int_0^t e^{\frac{i(E_n - E_k)\tau}{h}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(\xi)\, W(\xi, \tau)\, \psi_k(\xi)\, d\xi\, d\tau.$$

3. Физический смысл. Квантовый переход системы из состояния $\varphi_1(x)$ при $t=0$ в состояние $\varphi_2(x, \tau)$ при $t=\tau$ описывается формулой

$$c_{1,2}(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(x, \tau)K(x, \xi, \tau)\varphi_1(\xi)\,dx\,d\xi.$$

Плотность вероятности этого перехода равна $|c_{1,2}(\tau)|^2$.

Поэтому, чтобы получить переход частицы с уровня k оператора H на уровень k' под влиянием возмущения $\varepsilon W(x, t)$ в нулевом и первом порядках, нужно умножить слева последние формулы п. 2 на $\psi_{k'}(x)e^{\frac{iE_{k'}t}{h}}$ и проинтегрировать по x. Тогда нулевой член теории возмущений будет равен $\delta_{k'k}$, а первый член теории возмущений будет равен

$$\frac{i\varepsilon}{h}\int\limits_0^t e^{\frac{i(E_{k'}-E_k)\tau}{h}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_{k'}(\xi)W(\xi, t)\psi_k(\xi)\,d\xi\,dt.$$

Само фундаментальное решение можно получить из формулы для $c_{1,2}(\tau)$, если положить $\varphi_1(x)=\delta(x-x_1)$ и $\varphi_2(x, t)=\delta(x-x_2)$. Следовательно, фундаментальное решение описывает квантовый переход частицы из точки $x=x_1$ за время t в точку $x=x_2$.

4. Квазиклассическая асимптотика функции Грина. В соответствии с физическим смыслом асимптотика фундаментального решения при $h\to 0$ сводится к решению краевой задачи для классического уравнения Ньютона

$$\mu\frac{d^2X}{d\tau^2}=-\frac{\partial V}{\partial X}$$

при условии $X(0)=\xi$, $X(t)=x$ (в начальный момент частица находится в точке ξ, в конечный — в точке x).

Пусть решение $X(x, \xi, \tau, t)$ такой задачи единственно. Действие вдоль траектории $X(x, \xi, \tau, t)$ будет равно

$$S(x, \xi, t)=\int\limits_0^t\left\{\frac{\mu\dot{X}^2}{2}-V[X(x, \xi, \tau, t)]\right\}d\tau.$$

Асимптотика функции Грина при $h \to 0$ будет иметь следующий вид:

$$K(x, \xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i h}} \sqrt{\left|\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \xi}\right|}\, e^{\frac{i}{h} S(x, \xi, t)} (1 + hz(x, \xi, t, h)).$$

Здесь

$$z(x, \xi, t, 0) = \int_0^t \left|\frac{\partial^2 S(X, \xi, \tau)}{\partial X \partial \xi}\right|^{-1/2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left|\frac{\partial^2 S(X, \xi, \tau)}{\partial X \partial \xi}\right|^{1/2} d\tau.$$

Интеграл берется вдоль траектории $X(x, \xi, \tau, t)$.

В следующих примерах первый член асимптотики совпадает с самой функцией Грина.

Примеры.

1. $V(x) \equiv 0$;

$$X(\tau) = a\tau + c \left(c = x,\ a = \frac{\xi - x}{t}\right),$$

$$S(x, \xi, t) = \frac{\mu(\xi - x)^2}{2t}, \quad \left|\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \xi}\right| = \frac{\mu}{2t},$$

$$K(x, \xi, t) = \left(\frac{\mu}{2\pi i h t}\right)^{1/2} e^{\frac{i\mu}{2ht}(x-\xi)^2}.$$

2. $V(x) = -Fx$;

$$S(x, \xi, t) = -\frac{1}{12}\frac{F^2 t^3}{h a^3} + \frac{Ft}{2}(x + \xi) + \frac{\mu}{2t}(x - \xi)^2,$$

$$K(x, \xi, t) = \left(\frac{\mu}{2\pi i h t}\right)^{1/2} e^{\frac{i}{h} S(x, \xi, t)}.$$

3. $V(x) = \omega^2 x^2$;

$$K(x, \xi, t) = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi i h \sin \omega t}} \exp\left\{\frac{i}{h} \frac{1}{\sin \omega t} \times \right.$$
$$\left. \times \left[(x^2 + \xi^2) \cos \omega t - 2x\xi\right]\right\}.$$

Для немонотонных потенциалов (исключая x^2) при больших t через две точки, вообще говоря, проходит более одного пути. Однако для t, меньших некоторого t_1, решение задачи для потенциалов, достаточно гладких и растущих не быстрее x^2, будет единственно. Следовательно, для этих t будет справедлива приведенная выше асимптотика для $K(x, \xi, t)$.

На больший (и притом произвольный) отрезок времени эта асимптотика продолжается с помощью формулы для $K(x, \xi, t_1+t_2)$ из п. 1. Интегралы при этом вычисляются с помощью метода стационарной фазы (метода перевала).

Пусть рассматриваемая краевая задача имеет конечное число различных решений $X_i(x, \xi, \tau, t)$ $(i=1, 2, \ldots, k)$, и пусть $S_i(x_i, \xi, t)$ — действие вдоль i-й траектории. Тогда асимптотика функции Грина будет иметь вид

$$K_0(x, \xi, t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi i h}}\sum_{j=1}^{k} e^{\frac{i\pi}{2}\sigma_j}\left|\frac{\partial^2 S_j}{\partial x\, \partial \xi}\right|^{1/2} e^{\frac{i}{h}S_j(x, \xi, t)},$$

$$K(x, \xi, t)=K_0(x, \xi, t)+O(h).$$

Величина σ_j равна числу перемен знака $\frac{\partial^2 S(\xi, X, \tau)}{\partial \xi\, \partial X}$ при перемещении точки (τ, X) вдоль траектории $X_j(x, \xi, \tau, t)$ от точки $(0, \xi)$ до точки (t, x).

Асимптотика функции Грина может быть применена для приближенного решения задач рассеяния.

5. Предельный переход при $h \to 0$. Предельный переход при $h \to 0$ для решений уравнения Шредингера $\psi_h(x, t)$, удовлетворяющих начальному условию $\psi_h(x, 0)=f(x)$, имеет две особенности.

Во-первых, $\lim\limits_{h\to 0}\psi_h(x, t)$ не существует. Однако предел имеет выражение $\int\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |\psi_h(x, t)|^2\, dx$, т. е. вероятность пребывания частицы на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$.

Во-вторых, оказывается, что если начальное условие $\psi_h(x, 0)$ не зависит от h, то мы не получим в пределе всего многообразия классических движений. Надо задать начальное условие, например в виде

$$\psi_h(x, 0)=\varphi(x)\, e^{\frac{i}{h}f(x)},$$

так, чтобы при $h\to 0$ «существовал» импульс

$$p\psi_h(x, 0)=f'\psi_h(x, 0)+O(h).$$

Тогда, если $X(x_0, t)$ — решение уравнения Ньютона

$$\mu\ddot{X}=-\frac{\partial V}{\partial X}, \qquad X(0)=x_0, \qquad \mu\dot{X}(0)=f'(x_0),$$

то

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{a<x<b}|\psi_h(x,t)|^2\,dx=\int\limits_{a<X(x_0,t)<b}|\psi_h(x_0,0)|^2\,dx_0,$$

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{a<p<b}|\tilde{\psi}_h(p,t)|^2\,dp=\int\limits_{a\leqslant\mu\dot{X}(x_0,t)<b}|\psi_h(x_0,0)|^2\,dx_0,$$

где $\tilde{\psi}_h(p,t)$ — преобразование Фурье функции $\psi_h(x,t)$. Это означает, в частности, что если $\psi_h(x_0,0)$ отлично от нуля лишь в окрестности некоторой точки x^0, то вероятность найти частицу в момент t на фазовой плоскости в окрестности точки (p,x) будет отлична от нуля при $h\to 0$ только при условии, что $p=\mu\dot{X}(x^0,t)$ и $x=X(x^0,t)$. Следовательно, квантовая частица в пределе при $h\to 0$ движется по классической траектории.

Кроме того, если $F(x)\geqslant 0$ непрерывна и растет не быстрее некоторой степени x, то

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(x)|\psi_h(x,t)|^2\,dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}F[X(x_0,t)]|\psi_h(x_0,0)|^2\,dx_0,$$

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(p)|\tilde{\psi}_h(p,t)|^2\,dp=\int\limits_{-\infty}^{\infty}F[\mu\dot{X}(x_0,t)]|\psi_h(x_0,0)|^2\,dx_0.$$

Это означает, что квантовые средние значения при $h\to 0$ переходят в классические.

Начальное условие для $\psi_h(x,t)$ можно задать также в виде

$$\psi_h(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi ih}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{i}{h}px}\varphi(p)e^{\frac{i}{h}f(p)}\,dp.$$

Тогда, если $X(p_0,t)$ — решение уравнения Ньютона, удовлетворяющее условиям

$$X|_{t=0}=f'(p_0),\qquad \mu\dot{X}|_{t=0}=p_0,$$

то

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{a<x<b}|\psi_h(x,t)|^2\,dx=\int\limits_{a<X(p_0,t)<b}|\varphi(p_0)|^2\,dp_0,$$

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{a<p\leqslant b}|\tilde{\psi}_h(p,t)|^2\,dp=\int\limits_{a<\mu\dot{X}(p_0,t)<b}|\varphi(p_0)|^2\,dp_0.$$

Все эти соотношения справедливы в произвольной точке $t > 0$, если потенциал и начальные данные являются голоморфными и ограниченными на действительной оси функциями.

6. Квазиклассическая асимптотика решения уравнения Дирака. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, β и $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ — матрицы Дирака четвертого порядка:

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k^0 \\ \sigma_k^0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_k^0 & 0 \\ 0 & \sigma_k^0 \end{pmatrix},$$

где

$$\sigma_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение Дирака имеет следующий вид:

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} + e\Phi(\boldsymbol{x}) \psi - \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \left[ich \frac{\partial}{\partial x_k} - eA_k(\boldsymbol{x}) \right] \psi + \beta mc^2 \psi = 0,$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$, константы c и e равны скорости света и заряду электрона, заданные функции $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = (A_1(\boldsymbol{x}), A_2(\boldsymbol{x}), A_3(\boldsymbol{x}))$ и $\Phi(\boldsymbol{x})$ имеют смысл векторного и скалярного потенциалов электромагнитного поля. Через $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ и $\Phi(\boldsymbol{x})$ выражаются векторы электромагнитного поля $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ (см. [28]). Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$\psi|_{t=0} = \varphi(\boldsymbol{x}) \exp\left\{ \frac{i}{h} S_0(\boldsymbol{x}) \right\},$$

описывает поведение электрона и позитрона.

Уравнение классической релятивистской механики имеет вид

$$\dot{x}_i^{\pm} = \frac{\partial H_{\pm}(\boldsymbol{p}^{\pm}, \boldsymbol{x}^{\pm})}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i^{\pm} = -\frac{\partial H_{\pm}(\boldsymbol{p}^{\pm}, \boldsymbol{x}^{\pm})}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\boldsymbol{x}^{\pm}(0) = \boldsymbol{x}_0, \quad \boldsymbol{p}^{\pm}(0) = \operatorname{grad} S_0(\boldsymbol{x}_0),$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{\pm} = \left\{ \frac{dx_1^{\pm}(\boldsymbol{x}_0, t)}{dt}, \frac{dx_2^{\pm}(\boldsymbol{x}_0, t)}{dt}, \frac{dx_3^{\pm}(\boldsymbol{x}_0, t)}{dt} \right\},$$

$$\frac{dS^{\pm}}{dt} = \sum_{k=1}^{3} p_k^{\pm} \frac{\partial H^{\pm}}{\partial p_k} - H_{\pm}; \quad S(0) = S_0(x_0),$$

где
$$H_\pm(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) = -e\Phi \pm \sqrt{(c\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2 + m^2c^4}.$$

Пусть $\boldsymbol{r}_{1,2}^{\pm}$ — единичные векторы, которые матрицы
$$B_\pm = \pm\sqrt{(c \operatorname{grad} S_0 - c\boldsymbol{A})^2 + m^2c^4} - \\ - \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \left(c \frac{\partial S_0}{\partial x_k} - eA_k\right) + \beta mc^2$$

переводят в нуль. (Ранг матриц B_+ и B_- равен двум.)

Векторы $\boldsymbol{r}_{1,2}^{\pm}$ образуют базис. Поэтому без ограничения общности можно положить вместо общего начального условия
$$\psi_{1,2}^{\pm}\big|_{t=0} = \boldsymbol{r}_{1,2}^{\pm}\, \varphi(\boldsymbol{x})\, e^{\frac{i}{h} S_0(\boldsymbol{x})}.$$

Для простоты ниже рассматривается только случай $\psi_s^+(\boldsymbol{x}, t)$ $(s=1, 2)$. При этом используются только решения $\boldsymbol{x}^+(\boldsymbol{x}_0, t)$, $\boldsymbol{p}^+(\boldsymbol{x}_0, t)$ и $S^+(\boldsymbol{x}_0, t)$. Поэтому индекс «+» в дальнейшем опускается.

Введем обозначения:

1) $\hat{R}(\boldsymbol{x}_0, t) = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{H}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)]) + i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{E}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)]) \times$
$\times \frac{e}{2mc} \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}(\boldsymbol{x}_0, t)}$;

2) $\exp\left\{i \int\limits_0^t \hat{R}(\boldsymbol{x}_0, t)\, dt\right\}$ — оператор, переводящий начальное условие $f|_{t=0} = f_0$ в решение f уравнения
$$\frac{\partial f}{\partial t} = i\hat{R}(\boldsymbol{x}_0, t) f.$$

Точка $(\boldsymbol{x}, t')$ называется *фокусом* на траектории $X(\boldsymbol{x}_0, t)$, если $J(\boldsymbol{x}_0, t') = \det\left\|\frac{\partial X_i(\boldsymbol{x}_0, t')}{\partial x_{0j}}\right\| = 0$.

Если $(\boldsymbol{x}, t)$ не является фокусом ни для одной из траекторий, приходящих в нее, то множество решений $\boldsymbol{x} = X(\boldsymbol{x}_0, t)$ состоит не более чем из конечного числа точек $\boldsymbol{x}_{0k}(\boldsymbol{x}, t)$ $(k = 1, 2, \ldots, k_0)$.

Пусть $S_0(\boldsymbol{x})$, $A(\boldsymbol{x})$ и $\varphi(\boldsymbol{x})$ аналитичны, тогда при достаточно малом ε для любой фиксированной точки $(\boldsymbol{x}_0, t)$ существует матрица

$$C(\varepsilon, \boldsymbol{x}_0, t) = \left\| \frac{\partial X_i(\boldsymbol{x}_0, t-\varepsilon)}{\partial x_{0j}} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial X_i(\boldsymbol{x}_0, t+\varepsilon)}{\partial x_{0j}} \right\|^{-1}.$$

Пусть $\lambda_i(\varepsilon, \boldsymbol{x}_0, t)$, $i=1, 2, 3,$ — ее собственные значения. Индексом $m(\boldsymbol{x}_0, t)$ траектории $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0, t)$ называется величина

$$m(\boldsymbol{x}_0, t) = \operatorname*{Var}_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \sum_{i=1}^{3} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda_i(\varepsilon, \boldsymbol{x}_0, \tau)}{|\lambda_i(\varepsilon, \boldsymbol{x}_0, \tau)|}.$$

Пусть коэффициенты уравнения Дирака и начальное условие ограничены вместе со всеми своими производными. Тогда, если точка $(\boldsymbol{x}, t)$ не является фокусом, то решение уравнения Дирака может быть представлено в виде

$$\psi_s = \sum_{k=1}^{k_0} [Y(\boldsymbol{x}_{0k}, t)]^{-1/2} \sqrt[4]{\frac{c^2 - \dot{\boldsymbol{x}}^2(\boldsymbol{x}_{0k}, t)}{c^2 - \dot{\boldsymbol{x}}^2(\boldsymbol{x}_{0k}, 0)}}\, \varphi(\boldsymbol{x}_{0k}) \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{i}{h}\left[S(\boldsymbol{x}_{0k}, t) - \frac{\pi h}{2} m(\boldsymbol{x}_{0k}, t)\right]\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{i \int_0^t \hat{R}(\boldsymbol{x}_{0k}, t)\, dt\right\} \boldsymbol{r}_s + O(h);$$
$$\boldsymbol{x}_{0k} = \boldsymbol{x}_{0k}(\boldsymbol{x}, t).$$

Пусть $\varphi(\boldsymbol{x})$ — функция с интегрируемым квадратом. Тогда для любого $t > 0$ и любой трехмерной области D для решения ψ_s уравнения Дирака выполняется соотношение

$$\lim_{h \to 0} \iiint_{\boldsymbol{x} \in D} \sum_{\nu=1}^{4} |\psi_{s\nu}|^2\, d\boldsymbol{x} = \iiint_{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t) \in D} \varphi^2(\boldsymbol{x}_0)\, d\boldsymbol{x}_0, \qquad s = 1, 2.$$

Это равенство, аналогично равенствам предыдущего параграфа, означает, что квантовая частица в пределе при $h \to 0$ движется по классической траектории. Но значение каждой компоненты не сохраняется вдоль траектории. Частица в классическом пределе характеризуется единичным вектором, который меняется вдоль траектории *) по закону

$$\sqrt[4]{\frac{c^2-\dot{x}^2(x_0,\ t)}{c^2-\dot{x}^2(x_0,\ 0)}}\exp\left\{i\int\limits_0^t \hat{R}(x_0,\ t)\,dt\right\} r_{1,2}.$$

§ 5. Непрерывный спектр оператора энергии и задача рассеяния

Непрерывный спектр оператора энергии играет основную роль при рассмотрении задач теории столкновений. Простейшей является задача о рассеянии фиксированным силовым центром частицы, не имеющей внутренней структуры. Эта модельная задача играет важную роль при рассмотрении более сложных реальных задач теории рассеяния.

1. Постановка задачи. Оператор энергии исследуемой системы в координатном представлении имеет вид

$$H=H_0+V,\qquad H_0\psi(x)=-\Delta^2\psi(x),\quad V\psi(x)=V(x)\,\psi(x).$$

Оператор H_0 является оператором энергии свободно движущейся частицы, а оператор V описывает ее взаимодействие с рассеивающим центром. Это взаимодействие должно убывать с расстоянием, чтобы можно было говорить о свободном движении частицы вдали от центра. Точное математическое условие будет сформулировано ниже.

Эксперимент по рассеянию состоит из двух частей: во-первых, исследуется пучок свободных частиц, испускаемых источником, и, во-вторых, анализируются рассеянные частицы, которые свободно движутся вне действия облучаемой ими мишени. Вектор состояния, описывающий это свободное движение, удовлетворяет уравнению Шредингера с оператором H_0 в качестве оператора энергии:

$$i\,\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}=H_0\psi(t).$$

Это уравнение называют *свободным уравнением*. Любое его решение имеет вид

$$\psi(t)=e^{-iH_0t}\psi,$$

где ψ — произвольный постоянный вектор состояния.

*) То есть спиновая поляризация имеет классический предел при $\hbar\to 0$.

Векторы, описывающие свободное движение частиц в пучке до мишени и после рассеяния на мишени, будут, конечно, различными. Будем обозначать их ψ_- и ψ_+ соответственно. Задача состоит в определении ψ_+ по заданному ψ_-. Эта задача решается с помощью уравнения Шредингера:

$$i\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}=H\psi(t),$$

которому удовлетворяет любой вектор состояния описываемой системы. Вектор ψ определяет начальное условие для этого уравнения в следующем смысле:

$$\lim_{t\to-\infty}\|\psi(t)-e^{-iH_0t}\psi_-\|=0.$$

Решение $\psi(t)$ при $t\to\infty$ снова должно вести себя как решение свободного уравнения в таком же смысле:

$$\lim_{t\to+\infty}\|\psi(t)-e^{-iH_0t}\psi_+\|=0.$$

Вектор ψ_+ является искомым вектором, описывающим свободное движение рассеянных частиц. Зависимость этого вектора от начального условия ψ_- должна быть линейной:

$$\psi_+=S\psi_-.$$

Оператор S называется *оператором рассеяния* или *S-матрицей.*

2. Обоснование постановки задачи и ее решение. Обоснование постановки задачи рассеяния, описанной в предыдущем пункте, вытекает из следующего утверждения:

если $V(x)$ удовлетворяет условиям

$$\int|V(x)|\,dx<\infty,\qquad \int|V(x)|^2\,dx<\infty,$$

то существуют сильные пределы:

$$\lim_{t\to\pm\infty}e^{iHt}e^{-iH_0t}=U^{(\pm)},$$

которые являются изометрическими операторами. Оператор

$$S=U^{(+)*}(U^{(-)})$$

унитарен и коммутирует с оператором H_0.

С помощью этого результата получается обоснование сформулированной выше постановки задачи рассеяния. Действительно, по любому начальному вектору состояния ψ_- решение задачи дается формулой

$$\psi(t) = e^{-iHt}U^{(-)}\psi_-,$$

причем вектор ψ_+, дающий асимптотику этого решения при $t \to +\infty$, получается из ψ_- по формуле $\psi_+ = S\psi_-$.

Формулы приобретают более явный вид, если воспользоваться методом Фурье. Общее решение свободного уравнения имеет вид

$$\psi_-(x, t) = \int c(k)\, e^{-ik^2t} e^{i(k, x)}\, dk \quad (k^2 = (k, k)),$$

где $c(k)$ — произвольная квадратично интегрируемая функция. При условии

$$|V(x)| \leqslant \frac{C}{(1+|x|)^{2+\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0)$$

решение, определяемое начальным условием $\psi_-(x)$, существует и имеет вид

$$\psi(x, t) = \int c(k)\, e^{-ik^2t} u(x, k)\, dk.$$

Здесь $u(x, k)$ — собственные функции непрерывного спектра оператора H, удовлетворяющие *условию излучения*, т. е. решения уравнения

$$[-\Delta^2 + V(x)]\, u(x, k) = k^2 u(x, k),$$

определяемые с помощью условий

$$u(x, k) = e^{i(k, x)} + w(x, k),$$

$$w(x, k) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \lim_{|x| \to \infty} |x| \left(ik - \frac{\partial}{\partial |x|}\right) w(x, k) = 0.$$

Если $\int |V(x)|\, dx < \infty$, то $w(x, k)$ при больших $|x|$ имеет асимптотику

$$w(x, k) = \frac{e^{i|k||x|}}{|x|} f(|k|;\, n,\, \alpha) \quad \left(n = \frac{x}{|x|};\ \alpha = \frac{k}{|k|}\right).$$

В этом случае оператор S является интегральным оператором, строящимся с помощью ядра $f(|k|;\, n,\, \alpha)$, которое называется *амплитудой рассеяния.* В импульсном представлении, связанном с координатным представлением, в котором даны все наши формулы, с помощью преобразования Фурье:

$$\tilde{\psi}(\boldsymbol{k}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \psi(\boldsymbol{x})\, e^{i(\boldsymbol{k},\, \boldsymbol{x})}\, d\boldsymbol{x},$$

оператор S выглядит следующим образом:

$$S\tilde{\psi}(\boldsymbol{k}) = \tilde{\psi}(\boldsymbol{k}) + \frac{1}{\pi i} \int f\left(|\boldsymbol{k}|;\ \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|},\ \frac{\boldsymbol{k}'}{|\boldsymbol{k}'|}\right) \delta(\boldsymbol{k}^2 - \boldsymbol{k}'^2)\, \psi(\boldsymbol{k}')\, d\boldsymbol{k}'.$$

Условие унитарности S имеет вид

$$f(|\boldsymbol{k}|;\ \alpha,\ \beta) - \overline{f(|\boldsymbol{k}|;\ \beta,\ \alpha)} = \\ = \frac{i|\boldsymbol{k}|}{2\pi} \int f(|\boldsymbol{k}|;\ \alpha,\ \boldsymbol{n})\, \overline{f(|\boldsymbol{k}|;\ \beta,\ \boldsymbol{n})}\, d\boldsymbol{n}.$$

Кроме того, выполняется условие симметрии

$$f(|\boldsymbol{k}|;\ \alpha,\ \beta) = f(|\boldsymbol{k}|,\ -\beta,\ -\alpha),$$

являющееся следствием вещественности оператора энергии в координатном представлении.

3. Амплитуда рассеяния и уравнение для нее. Основная задача теории рассеяния состоит в определении $f(|\boldsymbol{k}|;\ \alpha,\ \beta)$. Основу различных подходов к этой задаче составляет интегральное уравнение для функции $u(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{k})$:

$$u(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{k}) = e^{i(\boldsymbol{k},\, \boldsymbol{x})} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} V(\boldsymbol{y})\, u(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{k})\, d\boldsymbol{y}.$$

Это уравнение носит название *интегрального уравнения теории рассеяния.* Не обязательно находить асимптотику решения $u(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{k})$ для получения $f(|\boldsymbol{k}|;\ \alpha,\ \beta)$. Более просто $f(|\boldsymbol{k}|;\ \alpha,\ \beta)$ определяется с помощью формулы

$$f(|\boldsymbol{k}|;\ \alpha,\ \beta) = -\frac{1}{4\pi} \int e^{-i(\boldsymbol{k},\, \boldsymbol{x})}\, V(\boldsymbol{x})\, u(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{k}')\, d\boldsymbol{x},$$

$$|\boldsymbol{k}| = |\boldsymbol{k}'|, \qquad \alpha = \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}, \qquad \beta = \frac{\boldsymbol{k}'}{|\boldsymbol{k}'|}.$$

Можно выписать интегральное уравнение, эквивалентное предыдущему уравнению для $u(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{k})$, из которого $f(|\boldsymbol{k}|;\ \alpha,\ \beta)$

определяется более непосредственно. Для этого надо рассмотреть ядро

$$t(k,\ l) = -\frac{1}{4\pi}\int e^{-i(k,\ x)}\, V(x)\, u(x,\ l)\, dx.$$

Функция $f(|k|;\ \alpha,\ \beta)$ получается из $t(k,\ l)$ при $|k| = |l|$. Уравнение имеет вид

$$t(k,\ l) = \tilde{V}(k - l) - \int \tilde{V}(k - m)\frac{1}{m^2 - l^2 - i0}\, t(m,\ l)\, dm,$$

$$\tilde{V}(k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int e^{i(k,\ x)}\, V(x)\, dx.$$

Здесь $(m^2 - l^2 - i0)^{-1}$ — обобщенная функция (см. гл. VIII, § 2). Формально

$$\frac{1}{m^2 - l^2 - i0} = P\frac{1}{m^2 - l^2} + i\pi\delta(m^2 - l^2),$$

где индекс P показывает, что интеграл понимается в смысле главного значения.

4. Случай сферической симметрии. Задача значительно упрощается, когда $V(x)$ зависит только от радиуса:

$$V(x) = V(|x|) = V(r).$$

В этом случае решение $u(x,\ k)$ и амплитуда $f(|k|;\ \alpha,\ \beta)$ разлагаются в ряды по полиномам Лежандра:

$$u(x,\ k) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{R_l(r,\ s)}{r}P_l(\cos(k,\ x)),$$

$$f(|k|;\ \alpha,\ \beta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)f_l(s)P_l(\cos(\alpha,\ \beta)),$$

$$r = |x|, \qquad s = |k|.$$

Здесь функции $R_l(r,\ s)$ являются собственными функциями непрерывного спектра радиальных операторов Шредингера

$$H_lR_l \equiv \left[-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + V(r)\right]R_l(r,\ s) = s^2R_l(r,\ s),$$

функции $f_l(s)$ связаны с асимптотикой этих решений при больших r:

$$R_l(r,\ s) = \frac{1}{2is}\left[e^{isr} - (-1)^l e^{-isr}\right] + f_l(s)\, e^{isr} + o(1).$$

Условие унитарности (см. п. 2) в терминах коэффициентов f_l выглядит следующим образом:

$$f_l(s)-\overline{f_l(s)}=2isf_l(s)\overline{f_l(s)}=2is\,|f_l(s)|^2.$$

Следовательно, $f_l(s)$ можно записать в виде

$$f_l(s)=\frac{1}{2is}\left[e^{2i\delta_l(s)}-1\right],$$

где $\delta_l(s)$ — вещественные функции, носящие название *асимптотических фаз*. Это название связано с тем, что асимптотику $R_l(r, s)$ можно переписать в виде

$$R_l(r, s)=C(s)\sin\left(sr-\frac{l\pi}{2}+\delta_l(s)\right)+o(1),$$

$$C(s)=\frac{i^l\exp i\delta_l(s)}{s}.$$

Для решений $R_l(r, s)$ можно выписать интегральные уравнения, аналогичные уравнению для $u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k})$. Однако более удобно иметь дело с другими решениями. Если ввести в рассмотрение решение $g_l(r, s)$ уравнения $H_lR_l=s^2R_l(r, s)$ с условием

$$g_l(r, s)=e^{isr}+o(1)\quad(r\to\infty),$$

то интегральное уравнение для $g_l(r, s)$ примет вид

$$g_l(r, s)=i^{l+1}h_l^{(1)}(sr)-\int_r^\infty J^{(l)}(s;\ r,\ t)\,V(t)\,g_l(t, s)\,dt,$$

$$J^{(l)}(s;\ r,\ t)=\frac{(-1)^{l+1}}{is}\left[j_l(sr)h_l^{(1)}(-st)-j_l(st)h_l^{(1)}(-sr)\right].$$

Здесь $j_l(t)$ и $h_l^{(1)}(t)$ — функции Бесселя и Ханкеля. В случае $l=0$

$$J^{(0)}(s;\ r,\ t)=\frac{\sin s(r-t)}{s}.$$

Фазы $\delta_l(s)$ определяются с помощью функций

$$M_l(s)=1+\int_0^\infty j_l(sr)\,V(r)\,g_l(r, s)\,dr$$

по формуле

$$S_l(s)=\exp\{-2i\delta_l(s)\}=\frac{M_l(s)}{M_l(-s)}.$$

Основное удобство выбора решений $g_l(r, s)$ заключается в вольтерровости соответствующего интегрального уравнения, вследствие которой разрешимость задачи исследуется очень легко. Другой способ, также связанный с уравнением типа Вольтерра, состоит в нахождении решения $\varphi_l(r, s)$, удовлетворяющего условию

$$\lim_{r\to 0}\frac{(2l+1)!!}{r^{l+1}}\varphi_l(r, s)=1.$$

Соответствующее интегральное уравнение имеет вид

$$\varphi_l(r, s)=\frac{j_l(sr)}{s^{l+1}}+\int_0^r J^{(l)}(s;\ r,\ t)\,V(t)\,\varphi_l(t, s)\,dt.$$

Для функций $M_l(s)$ справедливо представление

$$M_l(s)=1+\int_0^\infty h_l^{(1)}(s, r)\,V(r)\,\varphi_l(r, s)\,dr.$$

Вольтерровость уравнений для g_l и φ_l обеспечивает сходимость метода последовательных приближений для них, если $V(r)$ удовлетворяет единственному условию

$$\int_0^\infty r\,|V(r)|\,dr<\infty.$$

5. Общий случай. В общем случае несимметричного потенциала упрощения задачи, связанного с вольтерровостью интегральных уравнений, по-видимому, не существует. Основу для нахождения $f(|\boldsymbol{k}|;\ \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta})$ составляет само интегральное уравнение теории рассеяния (см. п. 3). Сходимость последовательных приближений для этого уравнения при всех $\boldsymbol{k}$ можно показать только при условии, что потенциал $V(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет какому-нибудь условию малости, например:

$$\max_{x}\int|V(\boldsymbol{y})|\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\,d\boldsymbol{y}<4\pi.$$

При этом условии оператор H совсем не имеет дискретного спектра. Если же дискретный спектр присутствует, то последовательные приближения заведомо сходятся не при всех $\boldsymbol{k}$.

В то же время при достаточно больших $|\boldsymbol{k}|$ последовательные приближения всегда сходятся независимо от величины потенциала. Этот факт является оправданием так называемой формулы Борна для амплитуды рассеяния, которая получится, если в выражение для $f(|\boldsymbol{k}|;\ \alpha,\ \beta)$ (см. п. 3) подставить вместо $u(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{k})$ ее нулевое приближение — соответствующую плоскую волну

$$f_B(|\boldsymbol{k}|;\ \alpha,\ \beta) = -\frac{1}{4\pi}\int e^{-i|\boldsymbol{k}|(\boldsymbol{x},\ \alpha)}\,V(\boldsymbol{x})\,e^{i|\boldsymbol{k}|(\boldsymbol{x},\ \beta)}\,d\boldsymbol{x},$$

т. е. борновская амплитуда есть не что иное, как преобразование Фурье от потенциала. Точное утверждение состоит в том, что при больших $|\boldsymbol{k}|$

$$f(|\boldsymbol{k}|;\ \alpha,\ \beta) - f_B(|\boldsymbol{k}|;\ \alpha,\ \beta) = o(1)$$

равномерно по α и β, причем если $V(\boldsymbol{x})$ — дифференцируемая функция и $|\operatorname{grad} V(\boldsymbol{x})| = O\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^{2+\varepsilon}}\right)$, то вместо $o(1)$ здесь можно поставить $O\left(\frac{1}{|\boldsymbol{k}|}\right)$. Иногда $f_B(|\boldsymbol{k}|;\ \alpha,\ \beta)$ называют *первым борновским приближением*, называя *борновским рядом* ряд, который получится, если в выражение для $f(|\boldsymbol{k}|;\ \alpha,\ \beta)$ подставить ряд последовательных приближений для решения $u(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k})$. Последовательные приближения интегрального уравнения для $t(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{l})$ (см. п. 3) дают выражение высших борновских приближений через первое, т. е. через преобразование Фурье от потенциала $\tilde{V}(\boldsymbol{k})$.

Интегральное уравнение теории рассеяния позволяет применять также и другие приближенные методы для определения амплитуды $f(|\boldsymbol{k}|;\ \alpha,\ \beta)$. Например, схема метода Галеркина для этого уравнения тесно связана с так называемым вариационным методом Швингера для задачи рассеяния.

6. Обратная задача теории рассеяния. Описанная задача нахождения оператора рассеяния по потенциалу может быть названа прямой задачей теории рассеяния. Можно поставить и обратную задачу, т. е. задачу восстановления потенциала по S-матрице. В настоящее время эта задача решена только для случая сферически симметричного потенциала $V(\boldsymbol{x}) = V(r)$, удовлетворяющего условию $\int_0^\infty r\,|V(r)|\,dr<\infty$. Потенциал определяется по заданной при всех s одной из фаз $\delta_l(s)$. Класс фаз, соответствующих потенциалу с этим условием, полностью охарактеризован. Если соответствующий радиальный оператор Шредингера H_l имеет дискретный спектр, то потенциал определяется по фазе $\delta_l(s)$ неоднозначно. Оператор H_l не имеет дискретного спектра при достаточно больших l, таким образом, потенциал определяется однозначно по фазе $\delta_l(s)$ при достаточно большом l.

Здесь приводится схема одного из методов решения обратной задачи для случая $l=0$. Функция $S_0(s)=\exp\{2i\delta_0(s)\}$ обладает следующими свойствами:

1) $|S_0(s)|=S_0(\infty)=S_0(0)=1$;

2) $S_0(-s)=\overline{S_0(s)}=S_0^{-1}(s)$;

3) $S_0(s)=1+\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(t)\,e^{-ist}\,dt$,

где $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F(t)|\,dt<\infty$, $\int\limits_0^{\infty}t\,|F'(t)|\,dt<\infty$;

4) $\arg S_0(s)\Big|_{-\infty}^{\infty}=-4\pi m$, где $m\geqslant 0$ — число дискретных собственных значений соответствующего оператора H_0, потенциал которого удовлетворяет указанному выше условию.

Пусть теперь задана функция $S_0(s)$, обладающая перечисленными свойствами. Составим функцию

$$F_1(t)=F(t)+\sum_{n=1}^{m}b_n e^{-\varkappa_n t},$$

где b_n и $\varkappa_n$ — произвольные положительные числа, причем среди $\varkappa_n$ нет совпадающих. Интегральное уравнение

$$A(x,\ y)=F_1(x+y)+\int\limits_x^{\infty}A(x,\ t)\,F_1(t+y)\,dt=0 \qquad (x<y)$$

разрешимо при всех $x\geqslant 0$. Функция

$$V(r)=-2\frac{d}{dr}A(r,\ r)$$

удовлетворяет условию $\int\limits_0^\infty r\,|V(r)|\,dr < \infty$, и $S_0(s)$ является S-функцией для оператора H_0 с $V(r)$ в качестве потенциала. Решение $g_0(r,\ s)$ дается формулой

$$g_0(r,\ s) = e^{irs} + \int\limits_r^\infty A(r,\ t)\, e^{its}\, dt.$$

Для случая $l > 0$ разработан аналог этой схемы. Интересно, что необходимые и достаточные условия 1)—4), которым должна удовлетворять фаза $\delta_0(s)$, остаются в силе и для случая $l > 0$.

Интегральное уравнение для $A(x,\ y)$ допускает явное решение в случае, когда $S_0(s)$ — рациональная функция. Решения и потенциал получаются в этом случае в виде рациональных функций от тригонометрических и гиперболических функций. Простейший пример:

$$S_0(s) = \frac{s+i\alpha}{s+i\beta}\,\frac{s-i\beta}{s-i\alpha}.$$

Соответствующий потенциал имеет вид

$$V(r) = 2\frac{\beta^2(\beta^2-\alpha^2)}{(\beta \operatorname{ch} \beta^2 + \alpha \operatorname{sh} \beta^2)^2}.$$

Обратная задача изучена также для систем уравнений с радиальными операторами и для одномерного уравнения Шредингера.

ГЛАВА VIII

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Обобщенные функции и действия над ними

1. Вводные замечания. Некоторые физические величины (например, плотность сосредоточенной нагрузки) не могут быть выражены при помощи обычных функций. Поэтому в физике и технике давно применялись *обобщенные*, или *сингулярные*, функции, выражающие такие величины. Примером сингулярной функции является так называемая *δ-функция*, определяемая следующим свойством:

Для любой непрерывной функции $\varphi(x)$ *выполняется равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0).$$

Очевидно, что δ-функция не является обычной функцией. В самом деле, из определения следует, что $\delta(x) = 0$ при $x \neq 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$. Но ни одна классическая функция не обладает такими свойствами. Можно лишь построить последовательность обычных функций $f_n(x)$ такую, что для любой непрерывной функции $\varphi(x)$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0).$$

Например, можно положить

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{при } |x| \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{при } |x| > \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

или

$$f_n(x)=\frac{n}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{n^2x^2}{2}}.$$

Такие последовательности функций называются *δ-образными последовательностями*. Во многих случаях, в которых, по сути дела, речь шла о δ-функции (например, в вопросах, связанных с точечными источниками и стоками, функцией Грина и т. д.), вместо δ-функции применялись δ-образные последовательности, после чего выполнялся соответствующий предельный переход. Это столь же осложняло математическую физику, как осложнила бы математический анализ систематическая замена всех производных пределами разностных отношений, а интегралов — пределами интегральных сумм.

Устранение этих трудностей оказалось возможным лишь после построения строгой теории сингулярных функций, установления правил действий над ними и создания достаточно развитого алгоритмического аппарата. Такое построение было проведено на базе изучения непрерывных линейных функционалов в некоторых линейных топологических пространствах.

2. Обозначения. Поскольку в дальнейшем рассматриваются функции как одного, так и многих переменных, то для сокращения записи будут применяться следующие обозначения:

1) $x=(x_1, \ldots, x_n)$;

2) $|x|^2=x_1^2+\ldots+x_n^2$;

3) $q=(q_1, \ldots, q_n)$, $q_k\geqslant 0$, q_k — целые;

4) $|q|=q_1+\ldots+q_n$, $q_k\geqslant 0$;

5) $q!=q_1!\ldots q_n!$;

6) $x^q=x_1^{q_1}\ldots x_n^{q_n}$;

7) $\varphi(x)=\varphi(x_1, \ldots, x_n)$;

8) $\varphi^{(q)}(x)=\dfrac{d^q\varphi}{dx^q}=\dfrac{\partial^{q_1+\ldots+q_n}\varphi(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{q_1}\ldots\partial x_n^{q_n}}$.

В этих обозначениях, например, ряд Тейлора для функций многих переменных пишется так же, как и для функций одного переменного:

$$\varphi(x+h)=\sum_{|q|=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(q)}(x)\,h^q}{q!}.$$

Кроме того, при интегрировании по всему пространству R_n опускается обозначение области интегрирования:

$$\int\varphi(x)\,dx=\int_{R_n}\varphi(x_1,\ \ldots,\ x_n)\,dx_1\ \ldots\ dx_n.$$

3. Обобщенные функции. *Обобщенной функцией* называется непрерывный линейный функционал $(f,\ \varphi)$, заданный в пространстве K. Оно состоит из бесконечно дифференцируемых финитных функций, принимающих комплексные значения. Функция $\varphi(x)$ называется *финитной*, если найдется такое a, что $\varphi(x)=0$ при $|x|\geqslant a$. Топология в пространстве K определена так: последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$ из пространства K называется *сходящейся к нулю*, если:

а) все функции $\varphi_n(x)$ обращаются в нуль вне одного и того же шара $|x|\leqslant a$;

б) для любого q имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\sup_x|\varphi_n^{(q)}(x)|=0.$$

Таким образом, обобщенная функция f считается заданной, если любой функции $\varphi(x)$ из пространства K сопоставлено число $(f,\ \varphi)$, причем выполнены следующие условия:

а) $(f,\varphi_1+\varphi_2)=(f,\varphi_1)+(f,\varphi_2)$;

б) $(f,\alpha\varphi)=\alpha(f,\varphi)$ для любого комплексного числа α;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(f,\varphi_n)=0$, если функции $\varphi_n(x)$ сходятся к нулю в топологии пространства K.

Обобщенная функция f называется *вещественной*, если для всех вещественных функций $\varphi(x)$ из пространства K значение $(f,\ \varphi)$ вещественно.

Каждой непрерывной функции $f(x)$ соответствует обобщенная функция (f,φ), задаваемая равенством

$$(f,\varphi)=\int f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

В самом деле, интеграл справа задает непрерывный линейный функционал в пространстве K. Аналогичным образом можно определить обобщенную функцию (f, φ), соответствующую любой локально суммируемой функции $f(x)$ (функция $f(x)$ называется ***локально суммируемой***, если она суммируема на каждом шаре $|x| \leqslant a$). Если $f(x)$ — локально суммируемая функция, а $\varphi(x)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция, то написанный выше интеграл сходится и определяет непрерывный линейный функционал в K.

Таким образом, каждой локально суммируемой функции $f(x)$ соответствует обобщенная функция (f, φ). Этим определяется вложение пространства локально суммируемых функций в пространство K' всех обобщенных функций. При этом *различным локально суммируемым функциям соответствуют различные обобщенные функции*: если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — локально суммируемые функции, и для всех функций $\varphi(x)$ из пространства K выполняется равенство $(f_1, \varphi) = (f_2, \varphi)$, то почти для всех значений x имеет место равенство $f_1(x) = f_2(x)$.

Обобщенные функции (f, φ), соответствующие локально суммируемым функциям $f(x)$, называются *регулярными обобщенными функциями*. Примером регулярной обобщенной функции может служить *функция скачка* (θ, φ), задаваемая формулой

$$(\theta, \varphi) = \int_0^\infty \varphi(x)\, dx.$$

Она соответствует функции $\theta(x)$, равной нулю при $x < 0$ и равной единице при $x > 0$.

Непрерывные линейные функционалы в пространстве K, не представимые в интегральном виде с локальной суммируемой функцией $f(x)$, называются *сингулярными* обобщенными функциями. Примером сингулярной обобщенной функции является уже упоминавшаяся δ-функция. Соответствующий функционал задается равенством

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0).$$

Широкий класс сингулярных обобщенных функций задается формулами вида

$$(\mu, \varphi) = \int \varphi(x)\, d\mu(x),$$

где μ — мера в пространстве R_n, имеющая конечную вариацию в каждом шаре $|x| \leqslant a$, а интеграл понимается в смысле Стилтьеса (в частности, μ может быть любой положительной мерой, такой, что μ-мера любого шара $|x| \leqslant a$ конечна).

К указанному классу принадлежит δ-функция, соответствующая единичной мере, сосредоточенной в точке $x=0$.

Сингулярные обобщенные функции часто обозначают тем же символом $f(x)$, что и обычные функции, и пишут

$$(f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x)\, dx.$$

Следует иметь в виду при этом, что обобщенные функции, вообще говоря, не имеют значений в отдельных точках.

4. Действия над обобщенными функциями. Сумма обобщенных функций определяется равенством

$$(f_1 + f_2, \varphi) = (f_1, \varphi) + (f_2, \varphi),$$

а произведение обобщенной функции на комплексное число α — равенством

$$(\alpha f, \varphi) = \alpha (f, \varphi).$$

Если обобщенные функции регулярны, то эти определения совпадают с обычными определениями суммы функций и произведения функции на число.

Вообще, при определении действий над обобщенными функциями требуют, чтобы для регулярных обобщенных функций эти определения совпадали с обычными. Например, из тождества

$$\int \big(f(x) \alpha(x)\big) \varphi(x)\, dx = \int f(x) \big(\alpha(x) \varphi(x)\big)\, dx$$

вытекает, что произведение обобщенной функции $f(x)$ на бесконечно дифференцируемую функцию $\alpha(x)$ задается формулой

$$(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha\varphi).$$

Произведение двух обобщенных функций, вообще говоря, не определено, так что, например, обобщенная функция $\delta^2(x)$ не имеет смысла.

В некоторых случаях можно производить замену переменной в обобщенной функции. ***Сдвигом обобщенной функции*** $f(x)$ ***на вектор*** h называют обобщенную функцию, задаваемую формулой

$$(f(x-h),\ \varphi)=(f(x),\varphi(x+h)).$$

Например,

$$(\delta(x-h),\ \varphi)=(\delta(x),\ \varphi(x+h))=\varphi(h).$$

Если U — линейное преобразование в n-мерном пространстве, то полагают

$$(f(Ux),\ \varphi(x))=|U|(f,\ \varphi(U^{-1}x)),$$

где $|U|$ — определитель преобразования. Так, ***преобразование подобия*** при $\alpha>0$ определяется формулой

$$(f(\alpha x),\ \varphi)=\alpha^n\left(f,\ \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right).$$

Если $\alpha(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, все нули которой простые, то полагают

$$\delta[\alpha(x)]=\sum_n\frac{\delta(x-x_n)}{|\alpha'(x_n)|},$$

где суммирование распространено на все нули функции $\alpha(x)$.

Например,

$$\delta(x^2-1)=\frac{\delta(x-1)}{2}+\frac{\delta(x+1)}{2},$$

$$\delta(\sin x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-\pi n).$$

5. Дифференцирование и интегрирование обобщенных функций. В соответствии с равенством

$$\int f^{(q)}(x)\,\varphi(x)\,dx=(-1)^q\int f(x)\,\varphi^{(q)}(x)\,dx$$

определяют q-***ю производную обобщенной функции*** f от одного переменного формулой

$$(f^{(q)},\ \varphi)=(-1)^q(f,\ \varphi^{(q)}).$$

Для функций многих переменных имеет место аналогичная формула

$$(f^{(q)}, \varphi)=(-1)^{|q|}(f, \varphi^{(q)}).$$

Например,

$$(\delta^{(q)}, \varphi)=(-1)^{|q|}(\delta, \varphi^{(q)})=(-1)^{|q|}\varphi^{(q)}(0).$$

Все обобщенные функции бесконечно дифференцируемы, поскольку функции $\varphi(x)$ из пространства K бесконечно дифференцируемы. В частности, любая локально суммируемая функция бесконечно дифференцируема в обобщенном смысле. Однако следует иметь в виду, что если функция $f(x)$ имеет почти всюду обычную производную, то определяемый последней функционал может не совпадать с производной от $f(x)$ как обобщенной функции.

Существенно, что производные высшего порядка от обобщенных функций не зависят от порядка дифференцирования.

Пример. Обобщенная функция (θ', φ) задается формулой

$$(\theta', \varphi)=-(\theta, \varphi')=-\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx=\varphi(0)=(\delta, \varphi).$$

Поэтому $\theta'(x)=\delta(x)$.

Пользуясь этой формулой, можно продифференцировать в обобщенном смысле любую функцию $f(x)$, имеющую разрывы первого рода и локально суммируемую производную в точках непрерывности. Именно, если разрывы функции $f(x)$ находятся в точках $x_1, \ldots, x_n$ и скачки в этих точках равны h_k, то

$$(f', \varphi)=\sum_{k=1}^{n} h_k\varphi(x_k)+\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Если $\alpha(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, имеющая простые нули, то

$$\delta^{(q)}[\alpha(x)]=\sum_n \frac{1}{|\alpha'(x_n)|}\left(\frac{1}{\alpha'(x)}\frac{d}{dx}\right)^q \delta(x-x_n),$$

где суммирование распространено на все нули функции $\alpha(x)$.

Для каждой обобщенной функции f одного переменного существует определенная с точностью до постоянного слагаемого первообразная обобщенная функция f_1, т. е. такая функция, что $f_1' = f$. Она определяется равенством

$$(f_1, \varphi') = -(f, \varphi)$$

на всех функциях, являющихся производными функций из K. Эти функции образуют подпространство, отличающееся от K на одно измерение. Поэтому можно положить

$$(f_1, \psi_0) = C$$

для фиксированной функции $\psi_0(x)$ из K такой, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x)\,dx \neq 0$, после чего обобщенная функция f_1 будет однозначно определена.

6. Предел последовательности обобщенных функций. Последовательность $\{f_k\}$ обобщенных функций называется *сходящейся к обобщенной функции* f, если для любой функции $\varphi(x)$ из пространства K имеет место равенство

$$\lim_{k \to \infty} (f_k, \varphi) = (f, \varphi).$$

Для каждой обобщенной функции f можно построить сходящуюся к ней последовательность функций $\{\psi_k(x)\}$ из пространства K, т. е. такую последовательность, что для всех функций $\varphi(x)$ из K

$$\lim_{k \to \infty} \int \psi_k(x)\,\varphi(x)\,dx = (f, \varphi).$$

Если последовательность $\{f_k(x)\}$ локально суммируемых функций такова, что

$$\lim_{k \to \infty} \int |f(x) - f_k(x)|\,dx = 0,$$

то обобщенные функции (f_k, φ) сходятся к обобщенной функции (f, φ). Однако из того, что в любой точке x выполнено равенство $\lim\limits_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$, не вытекает, что

$\lim\limits_{k\to\infty}(f_k, \varphi)=(f, \varphi)$. Например, при всех значениях x

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2k^3x^2}{\pi(1+k^2x^2)^2}=0.$$

Однако для любой функции $\varphi(x)$ из пространства K имеем

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2k^3}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\varphi(x)\,dx}{(1+k^2x^2)^2}=\varphi(0),$$

и поэтому в смысле обобщенных функций

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2k^3x^2}{(1+k^2x^2)^2}=\delta(x).$$

Последовательность регулярных обобщенных функций, сходящаяся к δ-функции, называется *δ-образной последовательностью.* Примерами δ-образных последовательностей для функций одного переменного могут служить:

а) $f_m(x)=\dfrac{m}{\pi(1+m^2x^2)}$,

б) $f_m(x)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin mx}{x}$,

в) $f_m(x)=\dfrac{m}{\pi}\dfrac{\sin^2 mx}{x^2}$.

Еще два примера δ-образных последовательностей указаны в п. 1.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$, состоящий из обобщенных функций, называется *сходящимся к обобщенной функции* f, если

$$\lim_{l\to\infty}\sum_{k=1}^{l} f_k=f.$$

Например, ряд

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}[\cos kx-\cos(k-1)x]$$

сходится в обобщенном смысле к нулю, поскольку для любой функции $\varphi(x)$ из пространства K

$$\lim_{j\to\infty}\left(1+\sum_{k=1}^{j}[\cos kx-\cos(k-1)x],\varphi\right)=$$

$$=\lim_{j\to\infty}(\cos jx,\ \varphi)=\lim_{j\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\cos jx\,dx=0.$$

Сходящийся ряд обобщенных функций можно почленно дифференцировать. Иными словами, если $\sum_{k=1}^{\infty}f_k=f$, то при любом q имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}f_k^{(q)}=f^{(q)}.$$

Пример. Ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{ikx}$ сходится в обобщенном смысле к обобщенной функции $2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-2\pi k)$. Если применить это равенство к функции $\varphi(x)$ из пространства K, то получится *формула Пуассона:*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi(k)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\varphi(2\pi k),$$

где

$$\psi(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{i\lambda x}\,dx$$

— преобразование Фурье функции $\varphi(x)$.

Далее, из равенства

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{ikx}=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-2\pi k)$$

вытекает, что

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\cos kx=\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-2\pi k).$$

Дифференцирование этого равенства дает

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^q \cos\left(kx + \frac{q\pi}{2}\right) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta^{(q)}(x - 2\pi k).$$

Точно так же из равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} = -\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|$$

вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{q-1} \cos\left(kx + \frac{q\pi}{2}\right) = -\left\{\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|\right\}^{(q)},$$

где производная в правой части этого равенства понимается в обобщенном смысле.

7. Локальные свойства обобщенных функций. Говорят, что обобщенная функция $f(x)$ *равна нулю в области* Ω, если $(f, \varphi) = 0$ для любой функции $\varphi(x)$ из пространства K, равной нулю вне замкнутого множества A, лежащего в Ω. Например, обобщенная функция $\delta(x)$ равна нулю в области Ω, получаемой из пространства R_n «выкалыванием» точки $x = 0$.

Обобщенная функция $f(x)$ называется *сосредоточенной на замкнутом множестве* B, если она равна нулю на дополнении к этому множеству. Наименьшее замкнутое множество, на котором сосредоточена обобщенная функция $f(x)$, называется *носителем* этой функции. Например, носителем обобщенной функции $\delta(x)$ и всех ее производных является точка $x = 0$. Носителем регулярной функции $f(x)$ является замыкание множества точек, в которых эта функция отлична от нуля.

Обобщенная функция называется *финитной*, если она сосредоточена в одном из шаров $|x| \leqslant a$.

Обобщенные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ называют *совпадающими в открытой области* Ω, если $f_1 - f_2 = 0$ в этой области. В частности, обобщенная функция $f(x)$ называется *регулярной в открытой области* Ω, если в этой области она совпадает с некоторой обычной локально суммируемой функцией. В этом случае можно говорить о значениях обобщенной функции $f(x)$ в точках множества Ω. Например, обобщенная функция $\delta(x)$ регулярна в дополнении к точке $x = 0$ и равна нулю в этом дополнении.

Пример. Пусть для любой функции $\varphi(x)$ из пространства K

$$(|x|^{-\frac{3}{2}}, \varphi)=\int_0^{\infty}\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx.$$

Это равенство определяет непрерывный линейный функционал в пространстве K, т. е. обобщенную функцию. Эта обобщенная функция вне точки $x=0$ совпадает с регулярной обобщенной функцией, задаваемой функцией $|x|^{-\frac{3}{2}}$. Иными словами, если функция $\varphi(x)$ из пространства K обращается в нуль в некоторой окрестности точки $x=0$, то имеет место равенство

$$(|x|^{-\frac{3}{2}}, \varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{-\frac{3}{2}}\varphi(x)\,dx.$$

8. Прямое произведение обобщенных функций. Пусть $f(x)$ — обобщенная функция в пространстве K_x функций $\varphi(x)$ от m переменных, а $g(y)$ — обобщенная функция в пространстве K_y функций $\psi(y)$ от n переменных. Через $f(x)\times g(y)$ обозначают обобщенную функцию в пространстве $K_{x,y}$ функций $\chi(x, y)$ от $m+n$ переменных, задаваемую формулой

$$(f\times g, \chi)=(f,(g, \chi(x, y))).$$

Эта обобщенная функция называется *прямым произведением* обобщенных функций $f(x)$ и $g(y)$. Если функция $\chi(x, y)$ из пространства $K_{x,y}$ имеет вид $\chi(x, y)=\varphi(x)\psi(y)$, где $\varphi(x)\in K_x$, $\psi(y)\in K_y$, то

$$(f\times g, \chi)=(f, \varphi)(g, \psi).$$

Имеют место следующие формулы для прямого произведения обобщенных функций:

$$f(x)\times g(y)=g(y)\times f(x),$$
$$f(x)\times\{g(y)\times h(z)\}=\{f(x)\times g(y)\}\times h(z).$$

Если обобщенная функция $f(x, y)$ инвариантна относительно сдвигов по переменным x (т. е. если $(f, \varphi(x+h, y))=(f, \varphi(x, y))$ для любого h), то она имеет вид

$$f(x, y)=1_x\times g(y),$$

где $g(y)$ — обобщенная функция в пространстве K_y, а 1_x — обобщенная функция в пространстве K_x, задаваемая формулой

$$(1_x, \varphi(x)) = \int \varphi(x)\, dx.$$

9. Свертка обобщенных функций. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — обобщенные функции одного переменного, причем выполнено одно из следующих условий:

а) одна из функций $f(x)$, $g(x)$ имеет ограниченный носитель;

б) носители обобщенных функций $f(x)$ и $g(x)$ ограничены с одной и той же стороны (например, $f(x)=0$ при $x<a$, $g(x)=0$ при $x<b$).

Тогда для любой функции $\varphi(x)$ из пространства K определено выражение

$$(f(x)\times g(y),\ \varphi(x+y)),$$

которое обозначается через $(f*g, \varphi)$. Обобщенную функцию $f*g$ называют *сверткой* обобщенных функций $f(x)$ и $g(x)$.

Если обобщенные функции $f(x)$ и $g(x)$ регулярны и удовлетворяют одному из условий а), б), то обобщенная функция $f*g$ также регулярна и задается функцией

$$f*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy.$$

Примеры. 1. Если $f(x)$ — любая обобщенная функция, то $\delta * f(x) = f(x)$. Таким образом, δ-функция играет роль единицы относительно операции свертывания. В частности, $\delta*\delta(x) = \delta(x)$.

2. Свертка обобщенной функции $f(x)$ с $\delta(x-h)$ равносильна сдвигу $f(x)$ на h:

$$\delta(x-h) * f(x) = f(x-h).$$

Справедливы равенства

$$f*g(x) = g*f(x)$$

и

$$(f*g)*h(x) = f*(g*h)(x),$$

выражающие коммутативность и ассоциативность свертки обобщенных функций.

Формула дифференцирования свертки имеет вид

$$\frac{d}{dx}(f*g)=\frac{df}{dx}*g=f*\frac{dg}{dx}.$$

Если $\lim\limits_{\nu\to\infty} f_\nu=f$, то $\lim\limits_{\nu\to\infty} f_\nu*g=f*g$ при каждом из следующих предположений:

а) все обобщенные функции $f_\nu(x)$ сосредоточены на одном и том же ограниченном множестве;

б) обобщенная функция g сосредоточена на ограниченном множестве;

в) носители обобщенных функций $f_\nu(x)$ и $g(x)$ ограничены с одной и той же стороны, и притом не зависящей от ν постоянной.

Отсюда вытекает, что если обобщенная функция $f_t(x)$ зависит от параметра t и дифференцируема по этому параметру, то формула

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_t*g(x))=\frac{\partial f_t}{\partial t}*g(x)$$

справедлива, если $f_t(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют одному из предположений а)—в).

Свертка обобщенных функций $f(x)$ и $g(x)$ от нескольких переменных определяется точно так же, как и для функций одного переменного. При этом требуется, чтобы хоть один из сомножителей, например $f(x)$, был *свертывателем*, т. е. обладал тем свойством, что для любой функции $\varphi(x)$ из пространства K функция

$$\psi(y)=(f,\ \varphi(x+y))$$

принадлежит тому же пространству.

Свертка свертывателя $f(x)$ *с функцией* $\varphi(x)$ из пространства K определяется формулой

$$(f*g,\ \varphi)=(g,\ f*\varphi).$$

Если $f(x)$—регулярная функция, то эта формула принимает следующий вид:

$$f*\varphi(x)=\int f(y-x)\varphi(y)\,dy.$$

10. Общий вид обобщенных функций. Пусть обобщенная функция $f(x)$ финитна. Тогда найдется параллелепипед

$$a_j \leqslant x_j \leqslant b_j,$$
$$1 \leqslant j \leqslant n,$$

на котором сосредоточена эта обобщенная функция. Можно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся целое число $p > 0$ и непрерывные функции $f_{q\varepsilon}(x)$, $0 \leqslant |q| \leqslant p$, обращающиеся в нуль при $a_j - \varepsilon \leqslant x_j \leqslant b_j + \varepsilon$ и удовлетворяющие соотношению

$$f(x) = \sum_{|q|=0}^{p} f_{q\varepsilon}^{(q)}(x).$$

Таким образом, *каждая финитная обобщенная функция является линейной комбинацией производных от непрерывных финитных функций* (причем, разумеется, производные понимаются в обобщенном смысле).

Аналогично, каждый линейный функционал в пространстве $K(a)$ бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль при $|x| \leqslant a$, имеет вид

$$(f, \varphi) = (F^{(q)}, \varphi) \equiv (-1)^{|q|} \int F(x) \varphi^{(q)}(x)\, dx,$$

где $F(x)$ — непрерывная функция в шаре $|x| \leqslant a$.

Если $f(x)$ — любая обобщенная функция, то можно построить такую последовательность финитных обобщенных функций $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$, что

1) $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$;

2) для каждого $a > 0$ найдется такое N, что при $n \geqslant N$, $m \geqslant N$ имеем $f_n(x) = f_m(x)$ в области $|x| \leqslant a$.

Особенно простое строение имеют обобщенные функции, сосредоточенные в одной точке. Например, все обобщенные функции, сосредоточенные в точке $x = 0$, являются конечными линейными комбинациями δ-функции и ее производных, т. е. имеют вид

$$f(x) = \sum_{|q|=0}^{n} c_q \delta^{(q)}(x).$$

11. Теорема о ядре. Во многих приложениях обобщенных функций оказывается полезной следующая теорема:

Теорема о ядре. *Пусть $B(\varphi, \psi)$ — билинейный функционал, такой, что $\varphi(x)$ пробегает пространство K_x бесконечно дифференцируемых финитных функций от m переменных, а $\psi(y)$ пробегает пространство K_y бесконечно дифференцируемых финитных функций от n переменных. Если функционал $B(\varphi, \psi)$ непрерывен по каждому из аргументов $\varphi(x)$ и $\psi(y)$, то существует такая обобщенная функция $f(x, y)$ в пространстве $K_{x,y}$ бесконечно дифференцируемых финитных функций от $m+n$ переменных, что*

$$B(\varphi, \psi) = (f, \varphi(x)\psi(y)).$$

§ 2. Обобщенные функции и расходящиеся интегралы

1. Регуляризация расходящихся интегралов. В ряде задач математической физики возникают расходящиеся интегралы. С помощью аппарата обобщенных функций можно получить алгоритм, позволяющий приписывать некоторым расходящимся интегралам определенное числовое значение и, оперируя с этим значением, получать решения этих задач. Этот алгоритм называется *регуляризацией расходящегося интеграла.*

Пусть $f(x)$ — некоторая функция. Точку x_0 называют *точкой локальной суммируемости функции* $f(x)$, если существует окрестность $U(x_0)$ этой точки, в которой функция $f(x)$ суммируема. Точки, не являющиеся точками локальной суммируемости, называются *особыми точками.* Здесь рассматриваются функции, имеющие на любом интервале лишь конечное множество особых точек.

Пусть K_f — подпространство в K, состоящее из функций $\varphi(x) \in K$, обращающихся в нуль в некоторой окрестности любой особой точки функции $f(x)$. Последовательность функций $\{\varphi_m(x)\}$ из пространства K_f *сходится к нулю*, если все функции $\varphi_m(x)$ сосредоточены на одном и том же компактном множестве, не содержащем особых точек функции $f(x)$, причем для любого q выполняется равенство

$$\lim_{m\to\infty} \sup_x |\varphi_m^{(q)}(x)| = 0.$$

Для любой функции $\varphi(x)$ из пространства K_f сходится интеграл $\int f(x)\varphi(x)\,dx$, причем равенство

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)\,dx$$

определяет линейный функционал в пространстве K_f. Этот функционал можно распространить на все пространство K*). Значение (f, φ) этого функционала для какой-нибудь функции $\varphi(x)$ из пространства K называют ***регуляризованным значением интеграла*** $\int f(x)\varphi(x)\,dx$ (если функция $\varphi(x)$ не принадлежит подпространству K_f, то этот интеграл может, вообще говоря, расходиться). Обобщенную функцию (f, φ), получаемую при описанном распространении, называют ***регуляризацией*** функции $f(x)$. Регуляризация функции $f(x)$ совпадает с $f(x)$ на множестве точек, дополнительном к множеству особых точек.

Пример. Равенство

$$\left(|x|^{-\frac{3}{2}}, \varphi\right) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{|x|^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

задает регуляризацию обобщенной функции $|x|^{-\frac{3}{2}}$.

Вообще говоря, одна и та же функция может иметь различные регуляризации. При этом регуляризации различных функций могут быть не согласованы друг с другом, так что, например, может нарушаться равенство $(f_1 + f_2, \varphi) = (f_1, \varphi) + (f_2, \varphi)$. Введем понятие ***канонической регуляризации***. Пусть L — линейное пространство, состоящее из функций $f(x)$ (вообще говоря, не локально суммируемых), каждая из которых имеет дискретное множество особых точек и бесконечно дифференцируема на дополнении к этому множеству. Предполагается, что пространство L содержит вместе с каждой функцией $f(x)$ все ее производные (на дополнении к множеству особых точек) и все функции $\alpha(x)f(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно дифференцируемые функции.

---

*) Продолжение непрерывного линейного функционала с подпространства на все пространство возможно в линейном локально выпуклом топологическом пространстве (ср. гл. I, § 4, п. 2).

Пусть каждой функции $f(x)$ из пространства L сопоставлен линейный функционал (f, φ) — регуляризация этой функции. Эта регуляризация называется *канонической*, и функционал обозначается через к.р. $f(x)$, если выполнены следующие условия:

1) к.р. $[\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)] = \lambda_1$ к.р. $f_1(x) + \lambda_2$ к.р. $f_2(x)$;

2) к.р. $\left(\dfrac{df}{dx}\right) = \dfrac{d}{dx}$(к.р. $f(x)$);

здесь слева $\dfrac{d}{dx}$ — производная от функции в обычном смысле, а справа — производная от обобщенной функции;

3) для любой бесконечно дифференцируемой функции $\alpha(x)$

к.р. $(\alpha(x) f(x)) = \alpha(x)$ к.р. $f(x)$.

Примером пространства функций, для которого существует каноническая регуляризация, служит *класс функций со степенными особенностями*. Точка x_0 называется степенной особой точкой функции $f(x)$, если в окрестности этой точки функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(x)\, h_j(x),$$

где $\alpha_j(x)$ — бесконечно дифференцируемые функции, а $h_j(x)$ — одна из следующих функций:

$$(x-x_0)_+^\lambda, \quad (x-x_0)_-^\lambda, \quad (x-x_0)^{-n}, \quad \lambda \neq -1, -2, \ldots$$

Функция x_+^λ определяется равенством

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

а функция x_-^λ — равенством

$$x_-^\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \\ |x|^\lambda & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Функция $f(x)$ называется *функцией со степенными особенностями*, если она имеет на любом интервале конечное множество степенных особых точек. Для того чтобы определить каноническую регуляризацию в пространстве функций со степенными особенностями, сначала решим вопрос о регуляризации функций x_+^λ, x_-^λ, x^{-n}.

2. Регуляризация функций x_+^λ, x_-^λ, x^{-n} и их линейных комбинаций.

1) Если $\operatorname{Re}\lambda > -1$, то интеграл

$$(x_+^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\, dx$$

сходится для любой функции $\varphi(x)$ из пространства K и задает линейный функционал в этом пространстве. Чтобы определить функционал (x_+^λ, φ) при $\operatorname{Re}\lambda < -1$, используют условие 2) канонической регуляризации. Пусть $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1, -2, \ldots, -n, \ldots$ Тогда $\operatorname{Re}(\lambda+n) > -1$ и потому функционал $(x_+^{\lambda+n}, \varphi)$ определяется равенством

$$(x_+^{\lambda+n}, \varphi) = \int_0^\infty x^{\lambda+n} \varphi(x)\, dx.$$

Но $x_+^\lambda = \dfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+n+1)} (x_+^{\lambda+n})^{(n)}$. Поэтому в силу условия 2) должно иметь место равенство

$$(x_+^\lambda, \varphi) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+n+1)} [(x_+^{\lambda+n})^{(n)}, \varphi] =$$

$$= (-1)^n \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+n+1)} [x_+^{\lambda+n}, \varphi^{(n)}] =$$

$$= (-1)^n \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+n+1)} \int_0^\infty x^{\lambda+n} \varphi^{(n)}(x)\, dx.$$

Таким образом, при $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$ функционал (x_+^λ, φ) задается формулой

$$(x_+^\lambda, \varphi) = (-1)^n \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+n+1)} \int_0^\infty x^{\lambda+n} \varphi^{(n)}(x)\, dx.$$

Можно проверить, интегрируя по частям, что эта формула равносильна следующей:

$$(x_+^\lambda,\ \varphi)=\int_0^1 x^\lambda\left[\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\ldots-\right.$$

$$\left.-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right]dx+\int_1^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\,(\lambda+k)}.$$

При $-n-1<\operatorname{Re}\lambda<-n$ можно воспользоваться более простой формулой:

$$(x_+^\lambda,\ \varphi)=$$

$$=\int_0^\infty x^\lambda\left[\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\ldots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right]dx.$$

Приведенные формулы и задают регуляризацию функций x^λ при $\operatorname{Re}\lambda<-1$. Следует отметить, что эта обобщенная функция не определена при $\lambda=-1,\ -2,\ \ldots,\ -n,\ \ldots$

2) Обобщенная функция $(x_-^\lambda,\ \varphi)$ задается при $\operatorname{Re}\lambda>-n-1$, $\lambda\neq-1,\ -2,\ \ldots,\ -n,\ \ldots$, формулой

$$(x_-^\lambda,\ \varphi)=\int_0^1 x^\lambda\left[\varphi(-x)-\varphi(0)+x\varphi'(0)-\ldots-\right.$$

$$\left.-(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right]dx+\int_1^\infty x^\lambda\varphi(-x)\,dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\,(\lambda+k)},$$

и при $-n-1<\operatorname{Re}\lambda<-n$ более простой формулой:

$$(x_-^\lambda,\ \varphi)=\int_0^\infty x^\lambda\left[\varphi(-x)-\varphi(0)+x\varphi'(0)-\ldots-\right.$$

$$\left.-(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right]dx.$$

3) Наряду с обобщенными функциями x_+^λ и x_-^λ иногда полезно рассматривать их линейные комбинации (при $\lambda \neq -1, -2, \ldots$):

$$|x|^\lambda = x_+^\lambda + x_-^\lambda, \quad |x|^\lambda \operatorname{sign} x = x_+^\lambda - x_-^\lambda,$$
$$(x+i0)^\lambda = \lim_{\varepsilon \to +0} (x+i\varepsilon)^\lambda = x_+^\lambda + e^{i\lambda\pi} x_-^\lambda,$$
$$(x-i0)^\lambda = \lim_{\varepsilon \to +0} (x-i\varepsilon)^\lambda = x_+^\lambda + e^{-i\lambda\pi} x_-^\lambda.$$

Для этих линейных комбинаций можно указать более удобные формулы. Так, при $-2m-1 < \operatorname{Re}\lambda < -2m+1$

$$(|x|^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \Big\{ \varphi(x) + \varphi(-x) - 2\left[\varphi(0) + \frac{x^2}{2!}\varphi''(0) + \ldots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0)\right]\Big\}\,dx.$$

При $\lambda = -2m$ пишут $|x|^{-2m} = x^{-2m}$, так что

$$(x^{-2m}, \varphi) = \int_0^\infty x^{-2m} \Big\{ \varphi(x) + \varphi(-x) - 2\left[\varphi(0) + \frac{x^2}{2!}\varphi''(0) + \ldots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0)\right]\Big\}\,dx.$$

В частности,

$$(x^{-2}, \varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2}\,dx.$$

При $-2m-2 < \operatorname{Re}\lambda < -2m$ имеет место формула

$$(|x|^\lambda \operatorname{sign} x, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \Big\{ \varphi(x) - \varphi(-x) - 2\left[x\varphi'(0) + \frac{x^3}{3!}\varphi^{(3)}(0) + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\right]\Big\}\,dx.$$

При $\lambda = -2m-1$ пишут $|x|^{-2m-1} \operatorname{sign} x = x^{-2m-1}$, так что

$$(x^{-2m-1}, \varphi) = \int_0^\infty x^{-2m-1} \Big\{ \varphi(x) - \varphi(-x) - 2\left[x\varphi'(0) + \frac{x^3}{3!}\varphi^{(3)}(0) + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\right]\Big\}\,dx.$$

В частности,

$$(x^{-1}, \varphi)=\int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx,$$

$$(x^{-2}, \varphi)=\int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)-2x\varphi'(0)}{x^2}\,dx.$$

Выражение (x^{-1}, φ) называется *главным значением интеграла* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$ *в смысле Коши.*

При $\lambda=-n$ обобщенная функция $(x+i0)^\lambda$ определяется равенством

$$(x+i0)^{-n}=x^{-n}-\frac{i\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,\delta^{(n-1)}(x),$$

а обобщенная функция $(x-i0)^\lambda$ — равенством

$$(x-i0)^{-n}=x^{-n}+\frac{i\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,\delta^{(n-1)}(x),$$

где (x^{-n}, φ) для четных и нечетных n определено выше.

3. Регуляризация функций со степенными особенностями. Пусть функция $f(x)$ имеет единственную особую точку $x=0$ и может быть записана в виде

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)\,h_j(x),$$

где $\alpha_j(x)$ — бесконечно дифференцируемые функции, а $h_j(x)$ — одна из функций x_+^λ, x_-^λ, x^{-n}, $\lambda\neq-1, 2, \ldots$ Тогда

$$(f, \varphi)=\sum_{j=1}^{n} (h_j, \alpha_j\varphi).$$

Так как $\alpha_j(x)\varphi(x)$ — функции из пространства K, то все слагаемые в правой части имеют смысл. Этим определяется регуляризация функции $f(x)$.

Аналогично определяется регуляризация функции $f(x)$, имеющей степенную особую точку $x=x_0$. Для любой функции $f(x)$ со степенными особенностями можно построить такие функции $f_k(x)$, $1 \leqslant k < \infty$, что $f = \sum f_k$, каждая из функций $f_k(x)$ имеет одну особую точку, причем на каждом отрезке $|x| \leqslant a$ лишь конечное число функций $f_k(x)$ отлично от нуля. Тогда полагают

$$(f, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (f_k, \varphi).$$

Можно показать, что значение (f, φ) не зависит от способа разбиения и что приведенная формула определяет каноническую регуляризацию в пространстве функций со степенными особенностями.

Таким образом, построен алгоритм для регуляризации интегралов вида $\int f(x)\varphi(x)\,dx$, где $f(x)$ — любая функция со степенными особенностями, а $\varphi(x)$ — функция из пространства K. Полученные формулы применимы к более широкому классу функций. Например, если функция $f(x)$ имеет *степенной рост* (т. е. если существуют такие a, p и C, что $|f(x)| \leqslant C(1+|x|^2)^p$ при $|x| \geqslant a$), то формулы регуляризации применимы ко всем бесконечно дифференцируемым функциям, убывающим вместе со всеми производными при $|x| \to \infty$ быстрее любой степени $|x|$.

Пример 1. Пусть бесконечно дифференцируемая функция $\varphi(x)$ обращается в нуль вне отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Из формул регуляризации следует, что

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}, \varphi(x)\right) = \int_0^{\infty} [\varphi(x) - \varphi(-x)] \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\,dx.$$

Аналогично

$$\left(\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}, \varphi\right) = \int_0^{\infty} \left[\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{\sin^2\frac{x}{2}} - \frac{8\varphi(0)}{x^2}\right] dx.$$

Пример 2. Известное интегральное выражение

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} e^{-x}\,dx$$

для Γ-функции сходится лишь при $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Однако оно сохраняет силу при любых значениях λ, $\lambda \neq -1, -2, \ldots$, если понимать интеграл в обобщенном смысле. При этом, если $-n > \operatorname{Re}\lambda > -n-1$, то формула в развернутом виде записывается так:

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1}\left[e^{-x} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^k}{k!}\right] dx.$$

4. Регуляризация в конечном промежутке. Пусть

$$x^\lambda_{[0,\,b]} = \begin{cases} x^\lambda & \text{при } x \in [0,\, b], \\ 0 & \text{при } x \overline{\in} [0,\, b]. \end{cases}$$

Поскольку функция $\varphi(x)$ может не равняться нулю в точке $x = b$, формулы п. 2 не применимы в данном случае. При $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1, -2, \ldots$, имеет место формула вида

$$(x^\lambda_{[0,\,b]}, \varphi) = \\ = \int_0^b x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right] dx + \\ + \varphi(0)\frac{b^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \ldots + \varphi^{(n-1)}(0)\frac{b^{\lambda+n}}{n!\,(\lambda+n)}.$$

Эту формулу можно рассматривать как регуляризацию интеграла $\int_0^b x^\lambda \varphi(x)\,dx$. Если $-n-1 < \operatorname{Re}\lambda < -n$, то при $b \to \infty$ формула переходит в одну из формул п. 2.

Пример. При любом значении λ, отличном от -1, -2, ..., $-n$, ...,

$$\int_0^b x^\lambda\,dx = \frac{b^{\lambda+1}}{\lambda+1}$$

(при $\operatorname{Re}\lambda < -1$ этот интеграл расходится и выражение в правой части дает регуляризованное значение интеграла).

Полезно отметить, что при $0 < c < b$ для любой функции $\varphi(x)$ из пространства K выполняется равенство

$$\int_0^b x^\lambda \varphi(x)\,dx = \int_0^c x^\lambda \varphi(x)\,dx + \int_c^b x^\lambda \varphi(x)\,dx,$$

если под первыми двумя интегралами понимать указанное выше регуляризованное значение.

Аналогично предыдущему можно регуляризовать интегралы вида

$$\int_a^b (x-a)^\lambda \alpha(x)\varphi(x)\,dx$$

и

$$\int_a^b (b-x)^\lambda \alpha(x)\varphi(x)\,dx,$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, а $\varphi(x)$ — функция, совпадающая на отрезке $[a, b]$ с функцией из пространства K.

Если точки a и b являются особыми точками для функции $f(x)$, то полагают

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \int_a^c f(x)\varphi(x)\,dx + \int_c^b f(x)\varphi(x)\,dx,$$

регуляризуя слагаемые справа указанным выше способом. Полученный результат не зависит от выбора точки c.

Примеры.

1. Равенство

$$\mathrm{B}(\lambda, \mu) = \int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1}\,dx,$$

справедливое в классическом смысле при $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\operatorname{Re}\mu > 0$, остается справедливым при всех λ и μ, кроме значений -1, -2, ..., если понимать интеграл в смысле регуляризованного значения. Однако в развернутом виде эта формула при $\operatorname{Re}\lambda > -k$, $\operatorname{Re}\mu > -s$ имеет такую громоздкую запись:

$$\mathrm{B}(\lambda, \mu) = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\lambda-1}\left[(1-x)^{\mu-1} - \sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r \frac{\Gamma(\mu)\,x^r}{r!\,\Gamma(\mu-r)}\right]dx +$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{\mu-1}\left[x^{\lambda-1} - \sum_{r=0}^{s-1}(-1)^r \frac{\Gamma(\lambda)\,(1-x)^r}{r!\,\Gamma(\lambda-r)}\right]dx +$$

$$+\sum_{r=0}^{k-1}\frac{(-1)^r\,\Gamma(\mu)}{2^{r+\lambda}\,r!\,\Gamma(\mu-r)\,(r+\lambda)} + \sum_{r=0}^{s-1}\frac{(-1)^r\,\Gamma(\lambda)}{2^{r+\mu}\,r!\,\Gamma(\lambda-r)\,(r+\mu)}.$$

2. Интегральное представление сферической функции

$$\mathfrak{P}_p^{-q}(x)=\frac{(x^2-1)^{\frac{q}{2}}}{2^q\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^{q-\frac{1}{2}}}{(x+t\sqrt{x^2-1})^{q-p}}\,dt,$$
$$|x|>1,$$

справедливое в классическом смысле при $\operatorname{Re} q>-\frac{1}{2}$, сохраняет силу при всех q, $q\neq-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$, если рассматривать регуляризованные значения интегралов.

5. Регуляризация на бесконечности. Пусть $b>0$ и $K(b, \infty)$ — класс всех функций $\varphi(x)$, каждая из которых определена и бесконечно дифференцируема при всех $x>b$ и такова, что преобразование инверсии $\varphi(x)\to\varphi(1/x)$ переводит ее в функцию $\psi(x)$, совпадающую на интервале $\left(0, \frac{1}{b}\right)$ с некоторой функцией из пространства K. При $\lambda\neq-1$, $0, 1, \ldots$ по определению

$$\int_b^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx=\int_0^{\frac{1}{b}} y^{-\lambda-2}\varphi\left(\frac{1}{y}\right)dy,$$

где интеграл в правой части понимается в смысле, указанном в п. 4.

Если функция $f(x)$ имеет вид $x^\lambda g(x)$, где $g(x)$ — функция класса $K(b, \infty)$, то полагают

$$\int_b^\infty f(x)\varphi(x)\,dx=\int_b^\infty x^\lambda g(x)\varphi(x)\,dx.$$

Аналогичным образом регуляризуются функции на интервале $(-\infty, -b)$. Для регуляризации функции на всей оси полагают

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{-b} f(x)\varphi(x)\,dx+\int_{-b}^{b} f(x)\varphi(x)\,dx+\int_b^\infty f(x)\varphi(x)\,dx,$$

применяя к отдельным слагаемым указанные выше формулы.

Примеры.

1. Подстановка $y=\frac{1}{x}$ показывает, что при $\lambda\neq-1$

$$\int_b^\infty x^\lambda\,dx=\int_0^{\frac{1}{b}} y^{-\lambda-2}\,dy=-\frac{b^{\lambda+1}}{\lambda+1}$$

(ср. пример п. 4). Поэтому при $\lambda\neq-1$

$$\int_0^\infty x^\lambda\,dx=\int_0^b x^\lambda\,dx+\int_b^\infty x^\lambda\,dx=0.$$

2. Равенство

$$\mathrm{B}(\lambda,\mu)=\int_0^\infty x^{\lambda-1}(1+x)^{-\lambda-\mu}\,dx,$$

справедливое в классическом смысле при $\operatorname{Re}\lambda>0$, $\operatorname{Re}\mu>0$, остается справедливым при всех значениях λ и μ (кроме $\lambda,\mu=-1,-2,\ldots$), если понимать интеграл в смысле регуляризованного значения.

3. Интегральное представление функции Макдональда

$$K_p(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}\int_1^\infty e^{-xt}(t^2-1)^{p-\frac{1}{2}}\,dt,$$

справедливое в классическом смысле лишь при $\operatorname{Re}p>-\frac{1}{2}$, сохраняет силу для всех $p\left(p\neq-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\ldots\right)$, если понимать интеграл в смысле регуляризованного значения.

6. Неканонические регуляризации. В некоторых случаях оказываются полезными неканонические регуляризации расходящихся интегралов.

1) Пусть x_+^{-n} — функция, задаваемая равенствами

$$x_+^{-n}=\begin{cases}x^{-n} & \text{при}\quad x>0,\\ 0 & \text{при}\quad x<0.\end{cases}$$

Ей соответствует функционал (x_+^{-n}, φ) вида

$$(x_+^{-n}, \varphi)=\int_0^\infty x^{-n}\Big[\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\ldots-$$
$$-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\,\theta(1-x)\Big]\,dx,$$

где $\theta(x)=0$ при $x<0$ и $\theta(x)=1$ при $x>0$. Этот функционал не является значением функционала x_+^λ при $\lambda=-n$.

2) Функции

$$x_-^{-n}=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x>0, \\ |x|^{-n} & \text{при} \quad x<0 \end{cases}$$

соответствует обобщенная функция

$$x_-^{-n}, \varphi)=\int_0^\infty x^{-n}\Big[\varphi(-x)-\varphi(0)+x\varphi'(0)-\ldots-$$
$$-(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\,\theta(1-x)\Big]\,dx.$$

Она также не является значением обобщенной функции x_-^λ при $\lambda=-n$.

3) Функции $|x|^{-2m-1}$ соответствует обобщенная функция

$$(|x|^{-2m-1}, \varphi)=\int_0^\infty x^{-2m-1}\Big\{\varphi(x)+\varphi(-x)-$$
$$-2\Big[\varphi(0)+\frac{x^2}{2!}\varphi''(0)+\ldots+\frac{x^{2m}}{(2m)!}\varphi^{(2m)}(0)\,\theta(1-x)\Big]\Big\}\,dx.$$

Эта функция не является значением обобщенной функции $|x|^\lambda$ при $\lambda=-2m-1$.

4) Функции $|x|^{-2m}\operatorname{sign} x$ соответствует обобщенная функция

$$(|x|^{-2m}\operatorname{sign} x, \varphi)=\int_0^\infty x^{-2m}\Big\{\varphi(x)-\varphi(-x)-$$
$$-2\Big[x\varphi'(0)+\frac{x^3}{3!}\varphi'''(0)+\ldots+$$
$$+\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\,\theta(1-x)\Big]\Big\}\,dx.$$

Эта функция не является значением обобщенной функции $|x|^\lambda \operatorname{sign} x$ при $\lambda=-2m$.

5) Функции

$$x_+^\lambda \ln^m x_+ = \begin{cases} x^\lambda \ln^m x & \text{при} \quad x>0, \\ 0 & \text{при} \quad x<0 \end{cases}$$

соответствует при $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1, -2, \ldots$, обобщенная функция

$$(x_+^\lambda \ln^m x_+, \varphi) = \int_0^1 x^\lambda \ln^m x \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right] dx + \int_1^\infty x^\lambda \ln^m x\, \varphi(x)\, dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^m m!\, \varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\,(\lambda+k)^{m+1}}.$$

При $-n-1 < \operatorname{Re}\lambda < -n$ ее можно задать более простой формулой:

$$(x_+^\lambda \ln^m x_+, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \ln^m x \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right] dx.$$

Последняя формула получается из формулы для x_+^λ (см. п. 2) заменой x^λ на $x^\lambda \ln^m x$. Точно так же обобщенная функция $x_-^\lambda \ln^m x_-$ задается формулой, получаемой из формулы для x_-^λ заменой x^λ на $x^\lambda \ln^m x$.

Аналогичное замечание справедливо для обобщенных функций

$$x_+^{-n}\ln^m x_+, \quad x_-^{-n}\ln^m x_-, \quad |x|^\lambda \cdot \ln^m |x|, \quad |x|^\lambda \operatorname{sign} x \ln^m |x|.$$

Они определяются формулами, получаемыми из формул для x_+^{-n}, x_-^{-n}, $|x|^\lambda$, $|x|^\lambda \operatorname{sign} x$ соответственно заменой x^{-n} (или x^λ) на $x^{-n}\ln^m x$ (или $x^\lambda \ln^m x$).

6) Обобщенные функции $\ln(x+i0)$ и $\ln(x-i0)$ определяются формулами:

$$\ln(x+i0) = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln(x+i\varepsilon) = \ln|x| + i\pi\theta(-x),$$

$$\ln(x-i0) = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln(x-i\varepsilon) = \ln|x| - i\pi\theta(-x),$$

где, как и выше, $\theta(x)=0$ при $x<0$ и $\theta(x)=1$ при $x>0$.

7) Обобщенные функции $(x+i0)^\lambda \ln(x+i0)$ и $(x-i0)^\lambda \times \ln(x-i0)$ задаются формулами:

$$(x+i0)^\lambda \ln(x+i0) = \begin{cases} x_+^\lambda \ln x_+ + i\pi e^{i\lambda\pi} x_-^\lambda + e^{i\lambda\pi} x_-^\lambda \ln x_- & \text{при } \lambda \neq -n, \\ (-1)^n i\pi x_-^{-n} + (-1)^{n-1} \dfrac{\pi^2}{2} \dfrac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + x^{-n} \ln|x| & \text{при } \lambda = -n; \end{cases}$$

$$(x-i0)^\lambda \ln(x-i0) = \begin{cases} x_+^\lambda \ln x_+ - i\pi e^{-i\lambda\pi} x_-^\lambda + e^{-i\lambda\pi} x_-^\lambda \ln x_- & \text{при } \lambda \neq -n, \\ (-1)^{n-1} i\pi x_-^{-n} + (-1)^{n-1} \dfrac{\pi^2}{2} \dfrac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + x^{-n} \ln|x| & \text{при } \lambda = -n. \end{cases}$$

7. Обобщенные функции x_+^λ, x_-^λ и им аналогичные как функции от параметра λ.

1) Регуляризация функции x_+^λ была основана на равенстве $(x_+^\lambda)' = \lambda x_+^{\lambda-1}$. Существует другой путь регуляризации этой функции (приводящий к тому же результату), который основан на идее аналитического продолжения. Если $\varphi(x)$ — фиксированная функция из пространства K, то выражение (x_+^λ, φ) является аналитической функцией от λ в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > -1$. Продолжая эту функцию аналитически на всю плоскость λ, получают значения выражения (x_+^λ, φ) и при $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -1$. Оказывается, что при $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1, -2, \ldots, -n$, значение этого аналитического продолжения дается формулой п. 2, а при $-n-1 < \operatorname{Re}\lambda < -n$ — более простой формулой, приведенной там же. Аналитическая функция (x_+^λ, φ) имеет простые полюсы при $\lambda = -1, -2, \ldots, -k, \ldots$ Вычеты в этих полюсах даются формулами

$$\operatorname*{Выч}_{\lambda=-k} (x_+^\lambda, \varphi) = \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}.$$

Можно сказать, что обобщенная функция x_+^λ является аналитической функцией от λ с полюсами в точках $\lambda=-1, \ldots, -k, \ldots$, причем

$$\operatorname*{Выч}_{\lambda=-k} x_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}(x), \quad k=1, 2, \ldots$$

Удобно нормировать обобщенную функцию, рассматривая вместо нее функцию $x_+^\lambda/\Gamma(\lambda+1)$. Эта функция является целой аналитической функцией от λ, принимающей при $\lambda=-1, \ldots, -k, \ldots$ значения $\delta^{(k-1)}(x)$ (поскольку функция $\Gamma(\lambda+1)$ имеет полюсы в тех же точках, что и функция x_+^λ).

Разложение функции x_+^λ по степеням $\lambda-\lambda_0$, $\lambda_0 \neq -1, \ldots, -k, \ldots$, имеет вид

$$x_+^\lambda = x_+^{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0)x_+^{\lambda_0}\ln x_+ + \ldots + \frac{(\lambda-\lambda_0)^m}{m!}x_+^{\lambda_0}\ln^m x_+ + \ldots$$

Разложение же x_+^λ по степеням $\lambda+k$ имеет вид

$$x_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}\delta^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}\frac{1}{\lambda+k} + x_+^{-k} + (\lambda+k)x_+^{-k}\ln x_+ + \ldots + \\ + \frac{(\lambda+k)^m}{m!}x_+^{-k}\ln^m x_+ + \ldots$$

Аналогичные утверждения справедливы для функции x_-^λ. Она имеет полюсы при $\lambda=-1, \ldots, -k, \ldots$ с вычетами $\frac{\delta^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}$. Нормированная функция $\frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$ является целой аналитической функцией от λ, принимающей при $\lambda=-1, \ldots, -k, \ldots$ значения $(-1)^{k-1}\delta^{(k-1)}(x)$. Имеют место формулы:

$$x_-^\lambda = x_-^{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0)x_-^{\lambda_0}\ln x_- + \ldots + \frac{(\lambda-\lambda_0)^m}{m!}x_-^{\lambda_0}\ln^m x_- + \ldots, \\ \lambda_0 \neq -1, -2, \ldots, -k, \ldots,$$

и

$$x_-^\lambda = \frac{\delta^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}\frac{1}{\lambda+k} + x_-^{-k} + (\lambda+k)x_-^{-k}\ln x_- + \ldots + \\ + \frac{(\lambda+k)^m}{m!}x_-^{-k}\ln^m x_- + \ldots$$

2) Обобщенная функция $|x|^\lambda$ является аналитической функцией от λ, имеющей простые полюсы при $\lambda=-1$, -3, ..., $-2k-1$, ... с вычетами

$$\underset{\lambda=-2k-1}{\text{Выч}} |x|^\lambda = \frac{2\delta^{(2k)}(x)}{(2k)!}.$$

Нормированная функция $\dfrac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$ — целая аналитическая функция от λ, принимающая при $\lambda=-2k-1$ значение

$$\frac{(-1)^k k!\,\delta^{(2k)}(x)}{(2k)!}.$$

Справедливы формулы:

$$|x|^\lambda = |x|^{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0)|x|^{\lambda_0}\ln|x| + \ldots + \frac{1}{m!}(\lambda-\lambda_0)^m |x|^{\lambda_0}\ln^m|x| + \ldots,$$
$$\lambda \neq -1,\ -3,\ \ldots,\ -2k-1,\ \ldots,$$

и

$$|x|^\lambda = \frac{2\delta^{(2k)}(x)}{(2k)!}\frac{1}{\lambda+2k+1} + |x|^{-2k-1} + (\lambda+2k+1)|x|^{-2k-1}\ln|x| + \ldots + \frac{(\lambda+2k+1)^m}{m!}|x|^{-2k-1}\ln^m|x| + \ldots$$

3) Обобщенная функция $|x|^\lambda \operatorname{sign} x$ также аналитична, имеет простые полюсы при $\lambda=-2$, -4, ..., $-2k$, ... с вычетами

$$\underset{\lambda=-2k}{\text{Выч}} |x|^\lambda \operatorname{sign} x = -2\frac{\delta^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!}.$$

Нормированная функция $\dfrac{|x|^\lambda \operatorname{sign} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}$ является целой аналитической функцией от λ, принимающей при $\lambda=-2$, -4, ..., $-2k$, ... значения

$$(-1)^k \frac{(k-1)!\,\delta^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!}.$$

Справедливы формулы:

$$|x|^{\lambda}\operatorname{sign}x=|x|^{\lambda_0}\operatorname{sign}x+(\lambda-\lambda_0)|x|^{\lambda_0}\ln|x|\operatorname{sign}x+\ldots+\frac{1}{m!}|x|^{\lambda_0}\ln^m|x|\operatorname{sign}x+\ldots,$$

$$\lambda\neq-2,\ -4,\ \ldots,\ -2k,\ \ldots,$$

и

$$|x|^{\lambda}\operatorname{sign}x=-2\frac{\delta^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!}\frac{1}{\lambda+2k}+|x|^{-2k}\operatorname{sign}x+(\lambda+2k)|x|^{-2k}\ln|x|\operatorname{sign}x+\ldots+\frac{(\lambda+2k)^m}{m!}|x|^{-2k}\ln^m|x|\operatorname{sign}x+\ldots$$

4) Обобщенные функции $(x+i0)^{\lambda}$ и $(x-i0)^{\lambda}$ являются целыми аналитическими функциями от λ. Они принимают при $\lambda=-1,\ -2,\ \ldots,\ -k,\ \ldots$ значения

$$(x+i0)^{-k}=x^{-k}-\frac{i\pi(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}(x)$$

и

$$(x-i0)^{-k}=x^{-k}+\frac{i\pi(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}(x)$$

соответственно.

8. Однородные обобщенные функции. Обобщенная функция $f(x)$ одного переменного называется *однородной функцией степени* λ, если для любого $a>0$ выполняется равенство $f(ax)=a^{\lambda}f(x)$. При каждом λ однородные обобщенные функции степени λ являются линейными комбинациями двух линейно независимых однородных функций. В качестве этих функций можно взять, например, $(x+i0)^{\lambda}$ и $(x-i0)^{\lambda}$. При $\lambda\neq-1,\ -2,\ \ldots,\ -k,\ \ldots$ можно взять функции x_+^{λ} и x_-^{λ}, а при $\lambda=-k$ — функции x^{-k} и $\delta^{(k-1)}(x)$.

Обобщенная функция $f(x)$ называется *присоединенной однородной функцией степени* λ *и порядка* m, если имеет место равенство

$$f(ax)=a^{\lambda}f(x)+a^{\lambda}\ln^m a\,f_0(x),$$

где $f_0(x)$ — присоединенная однородная обобщенная функция степени λ и порядка $m-1$ (однородные обобщенные функции степени λ совпадают с присоединенными однородными функциями той же степени и нулевого порядка).

При любом значении λ существуют две линейно независимые присоединенные однородные обобщенные функции степени λ и порядка m, линейными комбинациями которых являются все такие функции. При любом λ можно выбрать $(x+i0)^\lambda \ln^m(x+i0)$ и $(x-i0)^\lambda \ln^m(x-i0)$. При $\lambda \neq -1, \ldots$ $\ldots, -k, \ldots$ можно взять функции $x_+^\lambda \ln^m x_+$ и $x_-^\lambda \ln^m x_-$, а при $\lambda = -1, \ldots, -k, \ldots$ — функции $x_+^{-k} \ln^m x_+$ и $x_-^{-k} \ln^m x_-$.

9. Таблица производных некоторых обобщенных функций.

	$f(x)$	$f'(x)$
1	x_+^λ	$\lambda x_+^{\lambda-1}, \quad \lambda \neq -1, -2, \ldots, -k, \ldots$
2	x_-^λ	$\lambda x_-^{\lambda-1}, \quad \lambda \neq -1, -2, \ldots, -k, \ldots$
3	$\lvert x\rvert^\lambda$	$\lambda \lvert x\rvert^{\lambda-1}, \lambda \neq -1, -3, \ldots, -2k-1, \ldots$
4	$\lvert x\rvert^\lambda \operatorname{sign} x$	$\lambda \lvert x\rvert^{\lambda-1} \operatorname{sign} x, \lambda \neq -2, -4, \ldots, -2k, \ldots$
5	$(x+i0)^\lambda$	$\lambda (x+i0)^{\lambda-1}$
6	$(x-i0)^\lambda$	$\lambda (x-i0)^{\lambda-1}$
7	x_+^{-k}	$-kx_+^{-k-1} + \dfrac{(-1)^k \delta^{(k)}(x)}{k!}$
8	x_-^{-k}	$-kx_-^{-k-1} - \dfrac{\delta^{(k)}(x)}{k!}$
9	$\lvert x\rvert^{-2k-1}$	$-(2k+1)\, x^{-2k-2} - \dfrac{2\delta^{(2k+1)}(x)}{(2k+1)!}$
10	$\lvert x\rvert^{-2k} \operatorname{sign} x$	$-2kx^{-2k-1} + \dfrac{2\delta^{(2k)}(x)}{2k!}$
11	$\ln(x+i0)$	$(x+i0)^{-1} = \dfrac{1}{x} - i\pi\delta(x)$
12	$\ln(x-i0)$	$(x-i0)^{-1} = \dfrac{1}{x} + i\pi\delta(x)$
13	$\ln x_+$	x_+^{-1}
14	$\ln x_-$	x_-^{-1}
15	$\ln \lvert x\rvert$	x^{-1}
16	$\theta(x)$	$\delta(x)$

Следует еще отметить, что q-кратная первообразная от функции $|x|^\lambda$ задается формулой

$$\underbrace{\int \ldots \int}_{q} |x|^\lambda \, dx =$$

$$= \frac{|x|^{\lambda+q} (\operatorname{sign} x)^q}{(\lambda+1) \ldots (\lambda+q)} - \sum_{k=1}^{\left[\frac{q}{2}\right]} \frac{x^{q-2k}}{(2k-1)!\,(q-2k)!} \frac{1}{\lambda+2k}.$$

10. **Дифференцирование и интегрирование произвольного порядка.** Пусть $f(x)$ — функция, равная нулю на полуоси $(-\infty, 0)$ и интегрируемая на любом конечном отрезке полуоси $(0, \infty)$. Тогда ее q-кратная первообразная функция, обращающаяся в нуль на полуоси $(-\infty, 0)$, задается *формулой Коши*:

$$f_q(x) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x f(t)(x-t)^{q-1}\, dt.$$

Эту формулу можно записать в виде

$$f_q(x) = f(x) * \frac{x_+^{q-1}}{\Gamma(q)}.$$

По аналогии с этим равенством первообразная порядка λ от обобщенной функции $f(x)$, равной нулю на полуоси $(-\infty, 0)$, определяется следующей формулой:

$$f_\lambda(x) = f(x) * \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}.$$

Обобщенная функция $\dfrac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ обозначается через $\Phi_\lambda(x)$. В п. 7 было показано, что

$$\Phi_{-k}(x) = \lim_{\lambda \to -k} \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} = \delta^{(k)}(x) \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Поэтому

$$f_{-k}(x) = f(x) * \Phi_{-k}(x) = f(x) * \delta^{(k)}(x) = f^{(k)}(x).$$

Таким образом, первообразная порядка $-k$ есть не что иное, как производная порядка k от обобщенной функции $f(x)$. В соответствии с этим полагают для любого λ

$$\frac{d^\lambda f}{dx^\lambda}=f_{-\lambda}=f(x)*\Phi_{-\lambda}(x).$$

Справедлива формула

$$\frac{d^\beta}{dx^\beta}\left(\frac{d^\gamma f}{dx^\gamma}\right)=\frac{d^{\beta+\gamma}f}{dx^{\beta+\gamma}},$$

вытекающая из равенства

$$\Phi_\beta*\Phi_\gamma=\Phi_{\beta+\gamma}.$$

Для функции $\Phi_\mu(x)$

$$\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left(\frac{x_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\right)=\frac{x_+^{\mu-\lambda-1}}{\Gamma(\mu-\lambda)}.$$

В частности,

$$\frac{d^\lambda\theta(x)}{dx^\lambda}=\frac{x_+^{-\lambda}}{\Gamma(-\lambda+1)},$$

$$\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}(\delta^{(k)}(x))=\frac{x_+^{-k-\lambda-1}}{\Gamma(-k-\lambda)},$$

$$\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left(\frac{x_+^{\lambda-k-1}}{\Gamma(\lambda-k)}\right)=\delta^{(k)}(x).$$

Интегральное уравнение Абеля

$$g(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\alpha}$$

можно записать в виде

$$g(x)=f(x)*\Phi_\lambda(x),$$

где $\lambda=-\alpha+1$.

В силу формулы для свертки функций $\Phi_\lambda(x)$

$$g(x)*\Phi_{-\lambda}(x)=f(x)*\Phi_\lambda(x)*\Phi_{-\lambda}(x)=f(x)*\delta(x)=f(x).$$

При $0<\alpha<1$ получается формула

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-2}g(t)\,dt,$$

где интеграл понимается в смысле регуляризованного значения.

Если $g(x)$ — дифференцируемая функция, то последнее равенство можно записать так:

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} g'(t)\,dt.$$

11. Выражение некоторых специальных функций в виде производных дробного порядка. Пользуясь операциями дифференцирования и интегрирования дробного порядка, можно кратко записать интегральные представления некоторых специальных функций. Например, для гипергеометрической функции справедливы следующие равенства:

$$\frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x)=\frac{d^{\beta-\gamma}}{dx^{\beta-\gamma}}\left(\frac{x_+^{\beta-1}(1-x)_+^{-\alpha}}{\Gamma(\beta)}\right), \qquad 0<x<1,$$

$$\frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x)=$$

$$=\frac{d^{-\beta}}{dx^{-\beta}}\left[\frac{x_+^{\gamma-\beta-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\gamma-\beta)}\right], \qquad 0<x<1.$$

Для бесселевой функции справедливо равенство

$$2^p\sqrt{\pi}\,x^{p/2}J_p(\sqrt{x})=\frac{d^{-p-\frac{1}{2}}}{dx^{-p-\frac{1}{2}}}\left[\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right].$$

Пользуясь формулами дифференцирования и интегрирования, можно получить из этих выражений ряд соотношений для гипергеометрической и бесселевой функций. Например, беря производную порядка $-q-1$ от обеих частей последнего равенства, получают

$$\frac{d^{-q-1}}{dx^{-q-1}}\left[x^{\frac{p}{2}}J_p(x)\right]=2^{q+1}x^{\frac{p+q+1}{2}}J_{p+q+1}(\sqrt{x}).$$

В интегральной форме это равенство означает следующее:

$$2^{q+1}x^{\frac{p+q+1}{2}}J_{p+q+1}(\sqrt{x})=\int_0^x t^{\frac{p}{2}}J_p(\sqrt{t})\,\frac{(x-t)^q}{\Gamma(q+1)}\,dt.$$

§ 3. Некоторые обобщенные функции нескольких переменных

1. Обобщенная функция r^λ. Аналогом обобщенной функции $|x|^\lambda$ для функций многих переменных является обобщенная функция r^λ, $r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$. При $\operatorname{Re}\lambda>-n$ она задается формулой

$$(r^\lambda, \varphi)=\int r^\lambda\varphi(x)\,dx=$$
$$=\int (x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{\lambda}{2}}\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n.$$

Выражение (r^λ, φ) является аналитической функцией от λ в области $\operatorname{Re}\lambda>-n$. Продолжая аналитически эту функцию, получают

$$(r^\lambda, \varphi)=\Omega_n\int_0^\infty r^{\lambda+n-1}S_\varphi(r)\,dr,$$

где $\Omega_n=\dfrac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ — площадь поверхности единичной сферы n-мерного пространства, $S_\varphi(r)$ — среднее значение функции $\varphi(x)$ на сфере радиуса r и интеграл в правой части понимается в смысле регуляризованного значения (как $(r_+^{\lambda+n-1}, S_\varphi(r))$). В точках $\lambda=-n, -n-2, \ldots, -n-2k, \ldots$ обобщенная функция r^λ имеет простые полюсы. Разложение в ряд Лорана в окрестности полюса $\lambda=-n-2k$ имеет вид

$$r^\lambda=\Omega_n\left[\frac{\delta^{(2k)}(r)}{(2k)!}\frac{1}{\lambda+n+2k}+r^{-n-2k}+\right.$$
$$\left.+(\lambda+n+2k)\,r^{-n-2k}\ln r+\ldots\right].$$

Функционалы $\delta^{(2k)}(r)$, r^{-n-2k}, $r^{-n-2k}\ln^m r$ применяются к функции $S_\varphi(r)$ и понимаются как

$$(\delta^{(2k)}(r),\ S_\varphi(r)),\quad (r_+^{-n-2k},\ S_\varphi(r)),\quad (r_+^{-n-2k}\ln^m r_+,\ S_\varphi(r)).$$

Величина $(\delta^{(2k)}, S_\varphi)$ выражается через функцию $\varphi(x)$ и ее производные по формуле

$$(\delta^{(2k)}, S_\varphi)=S_\varphi^{(2k)}(0)=\frac{(2k)!\,\Delta^k\varphi(0)}{2^k k!\,n(n+2)\ldots(n+2k-2)},$$

где Δ — оператор Лапласа.

Обобщенная функция $\dfrac{2r^\lambda}{\Omega_n\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$ является целой аналитической функцией от λ, причем в точке $\lambda=-n-2k$ значение этой функции равно

$$\frac{(-1)^k\Delta^k\delta(x)}{2^k k!\,n(n+2)\ldots(n+2k-2)}.$$

Формула

$$\Delta r^\lambda=\lambda(\lambda+n-2)r^{\lambda-2},$$

справедливая в классическом смысле лишь при $\operatorname{Re}\lambda>-n+2$, сохраняет смысл при всех значениях λ, $\lambda\neq-n-2k$, $k=0, 1, \ldots$, если рассматривать обе части равенства как обобщенные функции.

Во многих задачах полезно разложить фунцию r^λ по функциям, принимающим постоянные значения на плоскостях. Это разложение имеет вид

$$2\frac{r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}=\frac{1}{\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\int\limits_\Omega|\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n|^\lambda\,d\Omega,$$

где точка $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ пробегает единичную сферу Ω.

В частности, при n нечетном

$$\delta(x)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}\int\limits_\Omega\delta^{(n-1)}(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n)\,d\Omega,$$

а при n четном

$$\delta(x)=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!}{(2\pi)^n}\int\limits_\Omega(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n)^{-n}\,d\Omega.$$

При любом n справедлива формула

$$\delta(x)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_\Omega(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n-i0)^{-n}\,d\Omega.$$

Из первой формулы для $\delta(x)$ вытекает, что

$$\varphi(0)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}\int\limits_\Omega d\omega\int\limits_{\sum\omega_kx_k=0}\frac{\partial^{n-1}\varphi(x)}{\partial\nu^{n-1}}\,d\sigma_0,$$

где $d\sigma_0$ — элементарная площадка в плоскости $\sum \omega_k x_k = 0$, а $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — дифференцирование по направлению ортогонального к ней вектора ω. Аналогично из второй формулы следует, что

$$\varphi(0) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!}{(2\pi)^n} \int_{\Omega} ((\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)^{-n},$$

$$\psi(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n))\, d\omega,$$

где положено

$$\psi(t) = \int\limits_{\sum \omega_k x_k = t} \varphi(x)\, d\sigma_t,$$

$d\sigma_t$ — элементарная площадка в плоскости $\sum \omega_k x_k = t$.

2. Обобщенные функции, связанные с квадратичными формами. Пусть $P = \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ — положительно определенная квадратичная форма. С помощью невырожденного линейного преобразования эта форма может быть приведена к виду $P = \sum\limits_{\alpha=1}^{n} y_\alpha^2$. Поэтому рассмотрение обобщенных функций вида P^λ в случае положительно определенных квадратичных форм P сводится к рассмотрению обобщенной функции $r^{2\lambda}$, проведенному в п. 1.

Сложнее обстоит дело для неопределенных квадратичных форм $P = \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$, поскольку в этом случае функция P^λ не является однозначно определенной. Формы с комплексными коэффициентами можно записать в виде $\mathcal{P} = P_1 + iP_2$, где P_1 и P_2 — вещественные квадратичные формы. Пусть «верхняя полуплоскость» — множество всех квадратичных форм $P_1 + iP_2$, для которых форма P_2 положительно определена, а «нижняя полуплоскость» — множество форм вида $P_1 - iP_2$, где P_2 положительно определена.

Если квадратичная форма $\mathcal{P}$ принадлежит верхней полуплоскости, то полагают

$$\mathcal{P}^\lambda = e^{\lambda [\ln|\mathcal{P}| + i \arg \mathcal{P}]},$$

где $0 < \arg \mathcal{P} < \pi$, и вводят обобщенную функцию

$$(\mathcal{P}^\lambda, \varphi) = \int \mathcal{P}^\lambda \varphi(x)\,dx$$

(интегрирование ведется по всему пространству R_n). Функция $\mathcal{P}^\lambda(x)$ однозначно определена, а интеграл сходится при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и является аналитической функцией от λ. Аналитически продолжая эту функцию по λ, определяют функционал $(\mathcal{P}^\lambda, \varphi)$ для других значений λ.

Рассматривая обобщенную функцию $\mathcal{P}^\lambda$ при $P_1 = 0$, получают обобщенную функцию $(iP_2)^\lambda$. Поскольку форма P_2 положительно определена, изучение этой обобщенной функции сводится к проведенному выше изучению обобщенной функции $r^{2\lambda}$. Аналитически продолжая выражение вычетов формы $(iP_2)^\lambda$ по коэффициентам формы P_2, находят выражение вычетов для формы $\mathcal{P}^\lambda$. Результат формулируется следующим образом:

Если $\mathcal{P} = \sum\limits_{\alpha, \beta=1}^{n} g_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ — *произвольная квадратичная форма с положительно определенной мнимой частью, то обобщенная функция* $\mathcal{P}^\lambda$ *является регулярной аналитической функцией от* λ *всюду, за исключением точек*

$$\lambda = -\frac{n}{2},\ -\frac{n}{2} - 1,\ \ldots,\ -\frac{n}{2} - k,\ \ldots,$$

в которых эта функция имеет простые полюсы. При этом

$$\underset{\lambda = -\frac{n}{2} - k}{\text{Выч}} \mathcal{P}^\lambda = \frac{e^{-\frac{\pi n i}{4}} \pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\, \Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right) \sqrt{(-i)^n |g|}} L^k \delta(x).$$

Здесь через L обозначен дифференциальный оператор

$$L = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta},$$

коэффициенты которого связаны с коэффициентами квадратичной формы $\mathcal{P}$ соотношениями

$$\sum_{\beta=1}^{n} g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha \quad (\delta_\gamma^\alpha \text{— символ Кронекера}).$$

Через $|g|$ обозначен дискриминант формы $\mathcal{P}$.

Функция $\sqrt{(-i)^n |g|}$ задается формулой

$$\sqrt{(-i)^n |g|} = \sqrt{|b|^2}\,(1-\lambda_1 i)^{\frac{1}{2}} \ldots (1-\lambda_n i)^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $|b|$ — определитель матрицы $\|b_{\alpha\beta}\|$ преобразования с вещественными коэффициентами:

$$x_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} b_{\alpha\beta} y_\beta,$$

приводящего формы P_1 и P_2, $\mathcal{P} = P_1 + iP_2$, к виду

$$P_1 = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2,$$
$$P_2 = y_1^2 + \ldots + y_n^2,$$

а значения квадратных корней задаются формулами

$$\sqrt{z} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}\arg z}, \quad -\pi < \arg z < \pi.$$

Если форма $\mathcal{P} = P_1 - iP_2$ принадлежит нижней полуплоскости, то ее вычеты в точках $\lambda = -\frac{n}{2}, \ldots, -\frac{n}{2} - k, \ldots$ задаются аналогичными формулами с заменой i на $-i$.

3. Обобщенные функции $(P+i0)^\lambda$ и $(P-i0)^\lambda$. Пусть

$$P = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$$

— невырожденная квадратичная форма с вещественными коэффициентами, в каноническую запись которой входят p положительных и q отрицательных членов. Рассматриваются квадратичные формы $P_1 + i\varepsilon P_2$, где P_2 — положительно определенная квадратичная форма с вещественными коэффициентами, а $\varepsilon > 0$. Полагают

$$(P+i0)^\lambda = \lim_{\varepsilon \to +0} (P + i\varepsilon P_2)^\lambda$$

(обобщенная функция $(P + i\varepsilon P_2)^\lambda$ определена в п. 2). Аналогично

$$(P-i0)^\lambda = \lim_{\varepsilon \to +0} (P - i\varepsilon P_2)^\lambda.$$

Обобщенная функция $(P+i0)^\lambda$, рассматриваемая как функция от λ, имеет простые полюсы в точках $\lambda=-\frac{n}{2}$, $-\frac{n}{2}-1, \ldots, -\frac{n}{2}-k, \ldots$ с вычетами

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{Выч}} (P+i0)^\lambda = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}qi}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)\sqrt{|\Delta|}} L^k\delta(x),$$

где Δ — дискриминант формы P.

Функция $(P-i0)^\lambda$ имеет полюсы в тех же точках с вычетами, получаемыми из последней формулы заменой i на $-i$.

Полагают

$$P_+^\lambda = \frac{e^{-\pi\lambda i}(P+i0)^\lambda - e^{\pi\lambda i}(P-i0)^\lambda}{-2i\sin\pi\lambda},$$

$$P_-^\lambda = \frac{(P+i0)^\lambda-(P-i0)^\lambda}{2i\sin\pi\lambda}.$$

При $\operatorname{Re}\lambda > -n$ обобщенная функция P_+^λ совпадает с регулярной обобщенной функцией, задаваемой формулой

$$(P_+^\lambda, \varphi) = \int\limits_{P>0} P^\lambda\varphi(x)\,dx,$$

а P_-^λ — с регулярной обобщенной функцией, задаваемой формулой

$$(P_-^\lambda, \varphi) = \int\limits_{P<0} |P(x)|^\lambda\varphi(x)\,dx.$$

4. Обобщенные функции вида $\mathcal{P}^\lambda f(\mathcal{P}, \lambda)$. Пусть $f(z, \lambda)$ — целая функция от z и λ. Если $\mathcal{P}$ — комплексная квадратичная форма с положительно определенной мнимой частью, то при $\operatorname{Re}\lambda>0$ полагают

$$(\mathcal{P}^\lambda f(\mathcal{P}, \lambda), \varphi(x)) = \int \mathcal{P}^\lambda f(\mathcal{P}, \lambda)\varphi(x)\,dx.$$

С помощью аналитического продолжения определяется обобщенная функция $\mathcal{P}^\lambda f(\mathcal{P}, \lambda)$ для других значений λ. Аналогично определяется обобщенная функция

$$\mathcal{P}^\lambda \ln^m \mathcal{P} f(\mathcal{P}, \lambda).$$

Обобщенная функция $(P+i0)^{\lambda} f(P+i0, \lambda)$ задается равенством

$$(P+i0)^{\lambda} f(P+i0, \lambda) = \lim_{\varepsilon \to +0} (P+i\varepsilon P_2)^{\lambda} f(P+i\varepsilon P_2, \lambda),$$

где P_2 — положительно определенная квадратичная форма. Аналогично

$$(P-i0)^{\lambda} f(P-i0, \lambda) = \lim_{\varepsilon \to +0} (P-i\varepsilon P_2)^{\lambda} f(P-i\varepsilon P_2, \lambda).$$

Если форма P положительно определена, то

$$(P+i0)^{\lambda} f(P+i0, \lambda) = (P-i0)^{\lambda} f(P-i0, \lambda) = P^{\lambda} f(P, \lambda).$$

Далее,

$$f(P+i0, \lambda) = f(P-i0, \lambda) = f(P, \lambda).$$

Справедливы равенства

$$(P+i0)^{\lambda} f(P, \lambda) = P_+^{\lambda} f(P_+, \lambda) + e^{i\lambda\pi} P_-^{\lambda} f(P_-, \lambda)$$

и

$$(P-i0)^{\lambda} f(P, \lambda) = P_+^{\lambda} f(P_+, \lambda) + e^{-i\lambda\pi} P_-^{\lambda} f(P_-, \lambda),$$

дающие выражения наших обобщенных функций через аргументы P_+, P_-.

К рассмотренному классу обобщенных функций относятся, например, такие функции, как

$$Z_{\lambda}\left[(P+i0)^{\frac{1}{2}}\right], \quad (P+i0)^{-\frac{\lambda}{2}} Z_{\lambda}\left[(P+i0)^{\frac{1}{2}}\right],$$

где $Z_{\lambda}(x)$ — цилиндрическая функция.

Каждой вещественной невырожденной квадратичной форме $P = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} g_{\alpha\beta} x_{\alpha} x_{\beta}$ соответствует *сопряженная* с ней форма

$$Q = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} g^{\alpha\beta} s_{\alpha} s_{\beta},$$

где $\sum_{\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}$ $(\alpha, \gamma = 1, 2, \ldots, n)$. В дальнейшем будет использована обобщенная функция

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}},$$

где c — вещественное число. Она определяется при нецелых λ разложением

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}=$$

$$=\frac{\pi\left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{n}{2}+\lambda}}{2\sin\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)\pi}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{-2\lambda-n+2m}(Q+i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}+m}}{m!\,\Gamma\left(-\lambda-\frac{n}{2}+m+1\right)}-\right.$$

$$\left.-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{2m}(Q+i0)^{m}}{m!\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}+m+1\right)}\right].$$

При $\lambda=s$, $s>0$, эта функция имеет полюс с вычетом

$$\operatorname*{Выч}_{\lambda=s}\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}=$$

$$=\frac{(-1)^{s}\pi^{\frac{n}{2}}\left(\frac{c}{2}\right)^{s-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\pi q i}{2}}\sqrt{|\Delta|}}{2}\sum_{m=0}^{s}\frac{(-1)^{m}\left(\frac{c}{2}\right)^{-2m}}{4^{m}m!\,(s-m)!}L^{m}\delta(x),$$

где q — число отрицательных членов в канонической записи формы Q.

Через

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]'}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}$$

обозначают правильную часть рассматриваемой обобщенной функции при $\lambda=s$.

5. Обобщенные функции на гладких поверхностях. Пусть поверхность S в n-мерном пространстве задается уравнением $P(x_1, \ldots, x_n)=0$, где P — бесконечно дифференцируемая функция, такая, что $\operatorname{grad} P \neq 0$ при $P=0$ (т. е. на поверхности $P=0$ нет особых точек). Обобщенную функцию $\delta(P)$ определяют следующим образом. В достаточно малой окрестности U_x любой точки x поверхности S вводят новые координаты, положив $u_1=P$ и выбрав остальные координаты $u_2, \ldots, u_n$ произвольно, с тем лишь ограничением, что якобиан $D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$ отличен от нуля в U_x. Если функция $\varphi(x)$ обращается в нуль вне U_x, то полагают

$$(\delta(P), \varphi)=\int \psi(0, u_2, \ldots, u_n)\, du_2 \ldots du_n,$$

где

$$\psi(u_1, \ldots, u_n)=\varphi_1(u_1, \ldots, u_n) D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix},$$
$$\varphi_1(u_1, \ldots, u_n)=\varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

В общем случае разлагают функцию $\varphi(x)$ на слагаемые $\varphi_k(x)$, обращающиеся в нуль вне окрестностей U_{x_k}.

Можно показать, что обобщенная функция $\delta(P)$ зависит только от функции P, но не зависит от выбора координат $u_1, \ldots, u_n$. Эту функцию можно определить также следующим образом. Пусть $\theta(P)$ — обобщенная функция

$$(\theta(P), \varphi)=\int\limits_{P \geqslant 0} \varphi(x)\, dx.$$

Тогда $\delta(P)=\theta'(P)$ в том смысле, что для любого j

$$\frac{\partial \theta(P)}{\partial x_j}=\frac{\partial P}{\partial x_j} \delta(P).$$

Для обобщенных функций $\delta^{(k)}(P)$ полагают $(\delta^{(k)}(P), \varphi)= =(-1)^k \int \psi_{u_1}^{(k)}(0, u_2, \ldots, u_n)\, du_2 \ldots du_n$. Всякий функционал f вида

$$(f, \varphi)=\sum_{i_1+\ldots+i_n \leqslant k} \int\limits_{P=0} a_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x) \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_n} \varphi(x)}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}\, dx$$

выражается через $\delta(P), \ldots, \delta^{(k)}(P)$ следующим образом:

$$(f, \varphi)=\sum_{j=0}^{k} \int b_j(x) \delta^{(j)}(P)\, dx.$$

При этом запись однозначна: если $f=0$, то

$$b_j(x)=0,\ 1\leqslant j\leqslant k.$$

Справедлива формула дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\delta^{(k)}(P)=\frac{\partial P}{\partial x_j}\delta^{(k+1)}(P).$$

Далее, имеют место равенства

$$P\delta(P)=0,$$
$$P\delta^{(k)}(P)+k\delta^{(k-1)}(P)=0,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots$$

Если поверхности $P=0$ и $Q=0$ не пересекаются и Q обладает теми же свойствами, что и P, то

$$\delta(PQ)=P^{-1}\delta(Q)+Q^{-1}\delta(P).$$

Если функция $a(x)$ не обращается в нуль, то

$$\delta^{(k)}(aP)=\frac{\delta^{(k)}(P)}{a^k(x)\,|\,a(x)\,|}.$$

Пусть теперь в n-мерном пространстве поверхность S имеет размерность $n-k$ и задается k уравнениями

$$P_1(x_1,\ \ldots,\ x_n)=0,\ \ldots,\ P_k(x_1,\ \ldots,\ x_n)=0,$$

где $P_j(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ — бесконечно дифференцируемые функции, причем поверхности $P_1=0,\ \ldots,\ P_k=0$ образуют правильную сетку. Иными словами, предполагается, что в окрестности любой точки x поверхности S можно ввести систему координат $u_1,\ \ldots,\ u_n$ так, что $u_j=P_j$, $1\leqslant j\leqslant k$, и якобиан $D\begin{pmatrix}x\\u\end{pmatrix}$ отличен от нуля. Тогда полагают

$$(\delta(P_1,\ \ldots,\ P_k),\ \varphi)=$$
$$=\int\psi(0,\ \ldots,\ 0,\ u_{k+1},\ \ldots,\ u_n)\,du_{k+1}\ \ldots\ du_n$$

и

$$\left(\frac{\partial^{i_1+\ldots+i_k}\delta}{\partial P_1^{i_1}\ldots\partial P_k^{i_k}},\ \varphi\right)=(-1)^{i_1+\ldots+i_k}\times$$
$$\times\int\frac{\partial^{i_1+\ldots+i_k}\psi(0,\ \ldots,\ 0,\ u_{k+1},\ \ldots,\ u_n)}{\partial u_1^{i_1}\ldots\partial u_k^{i_k}}\,du_{k+1}\ \ldots\ du_n.$$

Можно показать, что и эти обобщенные функции не зависят от выбора координат $u_1, \ldots, u_n$.

Для введенных функций справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\delta(P_1, \ldots, P_k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_i} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial x_j},$$

$$P_i\delta(P_1, \ldots, P_k) = 0,$$

$$P_iP_j\delta(P_1, \ldots, P_k) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_1P_2 \ldots P_k\delta(P_1, \ldots, P_k) = 0.$$

Справедливы также тождества, получаемые формальным дифференцированием последних равенств.

Примеры.

1. Обобщенная функция $\delta(\alpha_1x_1 + \ldots + \alpha_nx_n)$ задается равенством

$$(\delta(\alpha_1x_1 + \ldots + \alpha_nx_n), \ \varphi) = \int\limits_{\sum\alpha_kx_k=0} \varphi\, d\sigma,$$

где $d\sigma$ — элементарная площадка плоскости $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_kx_k = 0$.

2. Обобщенная функция $\delta(xy - c)$ при $c \neq 0$ задается формулой

$$(\delta(xy - c), \ \varphi) = -\int \varphi\left(x, \frac{c}{x}\right)\frac{dx}{x}.$$

3. Обобщенная функция $\delta(r - c)$, где $r^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$, $c > 0$, задается формулой

$$(\delta(r - c), \ \varphi) = \int\limits_{\Omega_c} \varphi\, d\Omega_c,$$

где $d\Omega_c$ — элементарная площадка поверхности сферы Ω_c радиуса c.

Ту же сферу можно задать уравнением $r^2 = c^2$. Тогда

$$(\delta(r^2 - c^2), \ \varphi) = \frac{1}{2c}\int\limits_{\Omega_c} \varphi\, d\Omega_c.$$

4. Если $P = x_1 - f(x_2, \ldots, x_n)$, то имеет место равенство

$$(\delta(P), \ \varphi) = \int \varphi[f(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n]\, dx_2 \ldots dx_n.$$

§ 4. Преобразование Фурье обобщенных функций

1. Пространство S и обобщенные функции степенного роста. Чтобы определить преобразование Фурье обобщенных функций, вводят новое функциональное пространство. Функция $\varphi(x)$ называется *быстро убывающей* при $|x|\to\infty$, если для любого m выполняется равенство $\lim\limits_{|x|\to\infty}|x|^m\varphi(x)=0$.

Пространство S состоит из функций $\varphi(x)$, быстро убывающих при $|x|\to\infty$ вместе с производными любого порядка (примером такой функции может служить e^{-x^2}, а также функции вида $P_k(x)e^{-x^2}$, где $P_k(x)$ — любой многочлен). Последовательность функций $\{\varphi_k(x)\}$ из пространства S называется *сходящейся к нулю,* если при любом m выполняются равенства

$$\lim_{k\to\infty}\sup_x\left[(1+|x|^2)^m|\varphi_k^{(q)}(x)|\right]=0,\qquad 0\leqslant|q|\leqslant m.$$

Каждая бесконечно дифференцируемая финитная функция принадлежит пространству S. Этим определяется непрерывное взаимно однозначное отображение пространства K на всюду плотное подмножество пространства S. Поэтому каждый непрерывный линейный функционал в пространстве S определяет непрерывный линейный функционал в пространстве K, т. е. некоторую обобщенную функцию. Такие обобщенные функции называют *обобщенными функциями степенного роста.* Например, $|x|^\lambda$, $(x+i0)^\lambda$ и т. д. являются обобщенными функциями степенного роста. Любая финитная обобщенная функция (т. е. обобщенная функция с ограниченным носителем) имеет степенной рост. Локально суммируемые функции $f(x)$, для которых интеграл $\int|f(x)|(1+|x|^2)^{-m}\,dx$ сходится при некотором m, определяют регулярные обобщенные функции степенного роста.

2. Преобразование Фурье обобщенных функций степенного роста. *Преобразованием Фурье суммируемой функции* $\varphi(x)$ называют функцию $\tilde{\varphi}(s)$, определяемую равенством

$$\tilde{\varphi}(s)=\int\varphi(x)\,e^{i(x,s)}\,dx,$$

где положено $(x, s)=x_1s_1+\ldots+x_ns_n$. Преобразование Фурье любой функции $\varphi(x)$ из пространства S принадлежит тому же пространству, причем отображение $\varphi(x)\to\tilde{\varphi}(s)$ является взаимно однозначным и взаимно непрерывным отображением пространства S на себя.

Если $f(x)$—суммируемая функция, имеющая суммируемый квадрат, то для любой функции $\varphi(x)$ из пространства S выполняется равенство

$$\int f(x)\varphi(-x)\,dx=\frac{1}{(2\pi)^n}\int \tilde{f}(s)\tilde{\varphi}(s)\,ds$$

(равенство Планшереля). В соответствии с этим *преобразование Фурье обобщенной функции $f(x)$ степенного роста* определяют как обобщенную функцию $\tilde{f}(s)$ такую, что для любой функции $\varphi(x)$ из пространства S имеет место равенство

$$(f, \varphi(-x))=\frac{1}{(2\pi)^n}(\tilde{f}, \tilde{\varphi}).$$

Обобщенная функция $\tilde{f}$ также имеет степенной рост. Для регулярных обобщенных функций $f(x)$ указаное определение совпадает с обычным. Преобразование Фурье обобщенной функции $f(x)$ обозначают также через $F(f)$.

Для преобразования Фурье обобщенных функций сохраняются следующие формулы дифференцирования обычных преобразований Фурье:

$$F\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)f\right]=P(-is_1, \ldots, -is_n)\tilde{f},$$

$$F[P(ix_1, \ldots, ix_n)f]=P\left(\frac{\partial}{\partial s_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial s_n}\right)\tilde{f},$$

где P—любой многочлен. Следует отметить, что

$$F[F(f(x))]=(2\pi)^n f(-x).$$

Пример. Из формулы обращения Фурье следует, что

$$\varphi(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\tilde{\varphi}(s)\,e^{-i(s, x)}\,ds.$$

Полагая $x=0$, получают

$$(\delta, \varphi)=\varphi(0)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\tilde{\varphi}(s)\,ds=\frac{1}{(2\pi)^n}(1, \tilde{\varphi}).$$

Поэтому $\tilde{\delta}=1$,

Применяя формулу дифференцирования, находят формулу преобразования Фурье для многочлена

$$F[P(x_1, \ldots, x_n)] = (2\pi)^n P\left(-i\frac{\partial}{\partial s_1}, \ldots, -i\frac{\partial}{\partial s_n}\right)\delta(s).$$

Например,

$$F(|x|^2) = F(x_1^2 + \ldots + x_n^2) = -(2\pi)^n \Delta\delta(s),$$

где Δ — оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial s_n^2}.$$

Если $f(x)$ — любая локально интегрируемая функция степенного роста, то ее можно записать в виде $f(x) = (1+|x|^2)^p h(x)$, где $h(x)$ — суммируемая функция, $p>0$ — целое. Если преобразование Фурье функции $h(x)$ равно $\tilde{h}(s)$, то преобразование Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$\tilde{f}(s) = (2\pi)^n (1-\Delta)^p \tilde{h}(s),$$

где дифференцирование понимается в смысле обобщенных функций.

Если $f(x)$ — периодическая локально интегрируемая функция с периодом $a = (a_1, \ldots, a_n)$, то ее можно разложить в ряд Фурье:

$$f(x) = \sum c_m e^{2\pi i\left(\frac{m}{a},\, x\right)},$$

где $\left(\frac{m}{a}, x\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k x_k}{a_k}$. Преобразование Фурье $f(x)$ имеет вид

$$\tilde{f}(s) = \sum_m c_m \delta\left(s + \frac{2\pi m}{a}\right).$$

Таким образом, функционал $\tilde{f}(s)$ сосредоточен на счетном множестве точек вида

$$2\pi\left(\frac{m_1}{a_1}, \ldots, \frac{m_n}{a_n}\right),$$

где $m_1, \ldots, m_n$ — целые числа.

3. Преобразование Фурье любых обобщенных функций. Чтобы определить преобразование Фурье любой обобщенной функции, вводят еще одно пространство. Через Z обозначают пространство, состоящее из целых аналитических функций $\varphi(z)$, удовлетворяющих при $m = 0, 1, 2, \ldots$ неравенствам вида

$$|z^m \varphi(z)| \leqslant Ce^{a|y|}, \qquad a > 0, \qquad z = x + iy,$$

где постоянные C и a зависят от $\varphi(z)$ и m. Последовательность функций $\{\varphi_k(z)\}$ из пространства Z называют *сходящейся к нулю*, если функции $\varphi_k(z)$ равномерно сходятся к нулю в каждой ограниченной области изменения z и если существуют такие постоянные C_m и постоянная $a>0$, что

$$|z^m \varphi_k(z)| \leqslant C_m e^{a|y|}$$

для всех значений k.

Пространство Z двойственно пространству K относительно преобразования Фурье: если $\varphi(x)$ — некоторая функция из пространства K, то функция

$$\tilde{\varphi}(z) = \int \varphi(x) e^{i(x, z)} dx$$

принадлежит пространству Z и отображение $\varphi(x) \to \tilde{\varphi}(z)$ является взаимно однозначным и взаимно непрерывным отображением пространства K на пространство Z.

Пусть $f(x)$ — любая обобщенная функция. *Ее преобразованием Фурье называют непрерывный линейный функционал $\tilde{f}$ в пространстве Z, такой, что для любой функции* $\varphi(x)$ *из пространства K выполняется соотношение*

$$(\tilde{f}, \tilde{\varphi}) = (2\pi)^n (f, \varphi).$$

Линейные непрерывные функционалы в пространстве Z в дальнейшем называются *обобщенными функциями* в этом пространстве. Таким образом, *преобразованием Фурье обобщенной функции в пространстве K является обобщенная функция в пространстве Z.*

Примеры.

1. Преобразованием Фурье регулярной обобщенной функции e^{bx} является обобщенная функция $(2\pi)^n \delta(s - ib)$ в пространстве Z. Функционал $\delta(s - ib)$ нельзя распространить с пространства Z на пространство S, поскольку в пространстве S есть неаналитические функции, определенные лишь при вещественных значениях аргумента.

2. Преобразованием Фурье регулярной обобщенной функции одного переменного $f(x) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}$ является обобщенная функция

$$(\tilde{f}, \tilde{\varphi}) = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\frac{s^2}{2}} \tilde{\varphi}(s) \, ds.$$

4. Таблица преобразований Фурье обобщенных функций одного переменного. Значения функций $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$, $D(\lambda)$ и коэффициентов $a_{-1}^{(n)}$ и т. д. приведены в конце таблицы.

№ п/п	Обобщенная функция $f(x)$	Ее преобразование Фурье $\tilde{f}(s)$
0	Обычная интегрируемая функция $f(x)$	$F[f]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{ixs}\,dx$
1	$\delta(x)$	1
2	x_+^λ $(\lambda \neq -1, -2, \ldots)$	$A(\lambda)(s+i0)^{-\lambda-1}=A(\lambda)s_+^{-\lambda-1}+B(\lambda)s_-^{-\lambda-1}$
3	x_+^n	$i^{n+1}n!\,s^{-n-1}+(-i)^n\pi\delta^{(n)}(s)$
4	$\theta(x)$	$is^{-1}+\pi\delta(s)$
5	x_-^λ $(\lambda \neq -1, -2, \ldots)$	$B(\lambda)(s-i0)^{-\lambda-1}=A(\lambda)s_-^{-\lambda-1}+B(\lambda)s_+^{-\lambda-1}$
6	x_-^n	$(-i)^{n+1}n!\,s^{-n-1}+i^n\pi\delta^{(n)}(s)$
7	$(x+i0)^\lambda$	$\dfrac{2\pi e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}}{\Gamma(-\lambda)}\,s_-^{-\lambda-1}$
8	$(x-i0)^\lambda$	$\dfrac{2\pi e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}}{\Gamma(-\lambda)}\,s_+^{-\lambda-1}$
9	$\lvert x\rvert^\lambda$ $(\lambda \neq -1, -3, \ldots)$	$C(\lambda)\lvert s\rvert^{-\lambda-1}$
10	$\lvert x\rvert^\lambda \operatorname{sign} x$ $(\lambda \neq -2, -4, \ldots)$	$iD(\lambda)\lvert s\rvert^{-\lambda-1}\operatorname{sign} s$
11	x^m	$2(-i)^m\pi\delta^{(m)}(s)$
12	x^{-m}	$i^m\dfrac{\pi}{(m-1)!}s^{m-1}\operatorname{sign} s$
13	x^{-1}	$i\pi\operatorname{sign} s$
14	x^{-2}	$-\pi\lvert s\rvert$
15	$\lvert x\rvert^{-2m-1}$	$c_0^{(2m+1)}s^{2m}-c_{-1}^{(2m+1)}s^{2m}\ln\lvert s\rvert$
16	$x^{-2m}\operatorname{sign} x$	$id_0^{(2m)}s^{2m-1}-id_{-1}^{(2m)}s^{2m-1}\ln\lvert s\rvert$

№ п/п	Обобщенная функция $f(x)$	Ее преобразование Фурье $\tilde{f}(s)$
17	$x_+^\lambda \ln x_+$ $(\lambda \neq -1, -2, \ldots)$	$ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\left\{\left[\Gamma'(\lambda+1)+ +i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\right](s+i0)^{-\lambda-1}- -\Gamma(\lambda+1)(s+i0)^{-\lambda-1}\ln(s+i0)\right\}$
18	$x_-^\lambda \ln x_-$ $(\lambda \neq -1, -2, \ldots)$	$-ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\left\{\left[\Gamma'(\lambda+1)- -i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\right](s-i0)^{-\lambda-1}- -\Gamma(\lambda+1)(s-i0)^{-\lambda-1}\ln(s-i0)\right\}$
19	$\ln x_+$	$i\left\{\left(\Gamma'(1)+i\frac{\pi}{2}\right)[(s+i0)^{-1}- -(s+i0)^{-1}\ln(s+i0)]\right\}$
20	$\ln x_-$	$-i\left\{\left(\Gamma'(1)-i\frac{\pi}{2}\right)[(s-i0)^{-1}- -(s-i0)^{-1}\ln(s-i0)]\right\}$
21	$\|x\|^\lambda \ln \|x\|$ $(\lambda \neq -1, -2, \ldots)$	$ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\left\{\left[\Gamma'(\lambda+1)+ +i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\right](s+i0)^{-\lambda-1}- -\Gamma(\lambda+1)(s+i0)^{-\lambda-1}\ln(s+i0)\right\}- -ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\left\{\left[\Gamma'(\lambda+1)- -i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\right](s-i0)^{-\lambda-1}- -\Gamma(\lambda+1)(s-i0)^{-\lambda-1}\ln(s-i0)\right\}$

№ п/п	Обобщенная функция $f(x)$	Ее преобразование Фурье $\tilde{f}(s)$
22	$\lvert x\rvert^{\lambda}\ln\lvert x\rvert\,\mathrm{sign}\,x$ $(\lambda\neq -1,\ -2,\ \ldots)$	$ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\left\{\left[\Gamma'(\lambda+1)+i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\right](s+i0)^{-\lambda-1}-\Gamma(\lambda+1)(s+i0)^{-\lambda-1}\ln(s+i0)\right\}+ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\left\{\left[\Gamma'(\lambda+1)-i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\right](s-i0)^{-\lambda-1}-\Gamma(\lambda+1)(s-i0)^{-\lambda-1}\ln(s-i0)\right\}$
23	$x^{-2m}\ln\lvert x\rvert$	$c_1^{(2m)}\lvert s\rvert^{2m-1}-c_0^{(2m)}\lvert s\rvert^{2m-1}\ln\lvert s\rvert$
24	$x^{-2m-1}\ln\lvert x\rvert$	$id_1^{(2m+1)}s^{2m}\,\mathrm{sign}\,s-id_0^{(2m+1)}s^{2m}\ln\lvert s\rvert\,\mathrm{sign}\,s$
25	$\lvert x\rvert^{-2m-1}\ln\lvert x\rvert$	$c_1^{(2m+1)}s^{2m}-c_0^{(2m+1)}s^{2m}\ln\lvert s\rvert+\frac{1}{2}c_{-1}^{(2m+1)}s^{2m}\ln^2\lvert s\rvert$
26	$\lvert x\rvert^{-2m}\ln\lvert x\rvert\,\mathrm{sign}\,x$	$id_1^{(2m)}s^{2m-1}-id_0^{(2m)}s^{2m-1}\ln\lvert s\rvert+\frac{i}{2}d_{-1}^{(2m)}s^{2m-1}\ln^2\lvert s\rvert$
27	$(1-x^2)_+^{\lambda}$ $(\lambda\neq -1,\ -2,\ \ldots)$	$\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)\left(\frac{s}{2}\right)^{-\lambda-\frac{1}{2}}J_{\lambda+\frac{1}{2}}(s)$
28	$\delta^{(n-1)}(1-x^2)$	$\sqrt{\pi}\left(\frac{s}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}}J_{-n+\frac{1}{2}}(s)$
29	$(1+x^2)^{\lambda}$	$\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\lambda)}\left(\frac{\lvert s\rvert}{2}\right)^{-\lambda-\frac{1}{2}}K_{-\lambda-\frac{1}{2}}(\lvert s\rvert)$

№ п/п	Обобщенная функция $f(x)$	Ее преобразование Фурье $\tilde{f}(s)$
30	$(x^2-1)_+^\lambda$ $(\lambda \neq -1, -2, \ldots)$	$-\Gamma(\lambda+1)\sqrt{\pi}\left\|\frac{s}{2}\right\|^{-\lambda-\frac{1}{2}} \times N_{-\lambda-\frac{1}{2}}(\|s\|)$
31	$(x^2-1)_+^n$	$2\pi(-1)^n\left(1+\frac{d^2}{ds^2}\right)^n\delta(s)+(-1)^{n+1}\sqrt{\pi}\left(\frac{s}{2}\right)^{-n-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(s)$
32	e^{bx}	$2\pi\delta(s-ib)$
33	$e^{\frac{x^2}{2}}$	Функционал $(\tilde{f}, \tilde{\varphi}) = -2\pi\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} e^{\frac{s^2}{2}}\tilde{\varphi}(s)\,ds$
34	$\delta^{(2m)}(x)$	$(-1)^m s^{2m}$
35	$\delta^{(2m+1)}(x)$	$(-1)^m i s^{2m+1}$
36	$\sin bx$	$-i\pi[\delta(s+b)-\delta(s-b)]$
37	$\cos bx$	$\pi[\delta(s+b)+\delta(s-b)]$
38	Многочлен $P(x)$	$2\pi P\left(-i\frac{d}{ds}\right)\delta(s)$

Здесь и в дальнейшем приняты стандартные обозначения:

$$N_\lambda(z)=\frac{1}{\sin\lambda\pi}[\cos\lambda\pi J_\lambda(z)-J_{-\lambda}(z)],$$

$$K_\lambda(z)=\frac{\pi}{2\sin\lambda\pi}[I_{-\lambda}(z)-I_\lambda(z)],$$

где

$$I_\lambda(z) = e^{\frac{-\pi\lambda i}{2}} J_\lambda(iz),$$
$$H_\lambda^{(1)}(z) = J_\lambda(z) + iN_\lambda(z),$$
$$H_\lambda^{(2)}(z) = J_\lambda(z) - iN_\lambda(z), \quad \lambda \text{ — не целое.}$$

Функции $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$, $D(\lambda)$ задаются равенствами:

$$A(\lambda) = ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1) = \frac{a_{-1}^{(n)}}{\lambda+n} + a_0^{(n)} + a_1^{(n)}(\lambda+n) + \ldots,$$
$$B(\lambda) = -ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1) = \frac{b_{-1}^{(n)}}{\lambda+n} + b_0^{(n)} + b_1^{(n)}(\lambda+n) + \ldots,$$
$$C(\lambda) = -2\sin\frac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1) = \frac{c_{-1}^{(n)}}{\lambda+n} + c_0^{(n)} + c_1^{(n)}(\lambda+n) + \ldots,$$
$$D(\lambda) = 2\cos\frac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1) = \frac{d_{-1}^{(n)}}{\lambda+n} + d_0^{(n)} + d_1^{(n)}(\lambda+n) + \ldots$$

Коэффициенты $a_{-1}^{(n)}$, $a_0^{(n)}$ и $a_1^{(n)}$ имеют вид:

$$a_{-1}^{(n)} = \frac{i^{n-1}}{(n-1)!},$$
$$a_0^{(n)} = \frac{i^{n-1}}{(n-1)!}\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \Gamma'(1) + i\frac{\pi}{2}\right],$$
$$a_1^{(n)} = \frac{i^{n-1}}{(n-1)!}\left\{\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j^2} + \sum_{\substack{j\neq k\\ 1\leqslant j,\, k\leqslant n-1}}\frac{1}{jk} - \frac{\pi^2}{8} + \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right)\Gamma'(1) + \Gamma''(1) + i\frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \Gamma'(1)\right]\right\}.$$

Коэффициенты $b_{-1}^{(n)}$ и т. д. выражаются через $a_k^{(n)}$ по формулам:

$$b_k^{(n)} = \overline{a_k^{(n)}},$$
$$c_k^{(n)} = 2\operatorname{Re} a_k^{(n)},$$
$$d_k^{(n)} = 2\operatorname{Im} a_k^{(n)}.$$

В частности,

$$b_{-1}^{(n)} = \frac{(-i)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad c_{-1}^{(n)} = \frac{2(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\cos(n-1)\frac{\pi}{2},$$
$$d_{-1}^{(n)} = \frac{2(-1)^n}{(n-1)!}\sin(n-1)\frac{\pi}{2}.$$

5. Таблица преобразований Фурье обобщенных функций многих переменных.

№ п/п	Обобщенная функция $f(x)$	Ее преобразование Фурье $\tilde{f}(\varrho)$
1	r^{λ} $(\lambda \neq -n, -n-2, \ldots)$	$2^{\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\varrho^{-\lambda-n}$, $\varrho^2 = s_1^2 + \ldots + s_n^2$
2	$r^{\lambda}\ln r$ $(\lambda \neq -n, -n-2, \ldots)$	$C'_{\lambda}\varrho^{-\lambda-n} + C_{\lambda}\varrho^{-\lambda-n}\ln\varrho$
3	$r^{\lambda}\ln^2 r$ $(\lambda \neq -n, -n-2, \ldots)$	$C''_{\lambda}\varrho^{-\lambda-n} + 2C'_{\lambda}\varrho^{-\lambda-n}\ln\varrho + C_{\lambda}\varrho^{-\lambda-n}\ln^2\varrho$
4	$\delta^{(2m)}(r)$	$\dfrac{(2m)!}{\Omega_n} c_{-1}^{(n+2m)}\varrho^{2m}$
5	r^{-2m-n}	$\dfrac{1}{\Omega_n}\left[c_{-1}^{(n+2m)}\varrho^{2m}\ln\varrho + c_0^{(n+2m)}\varrho^{2m}\right]$
6	$r^{-2m-n}\ln r$	$\dfrac{1}{\Omega_n}\left[\dfrac{1}{2}c_{-1}^{(n+2m)}\varrho^{2m}\ln^2\varrho + c_0^{(n+2m)}\varrho^{2m}\ln\varrho + c_1^{(n+2m)}\varrho^{2m}\right]$
7	$\delta(r-a)$	$\Omega_{n-1}a^{\frac{n}{2}}\varrho^{-\frac{n}{2}+1}J_{\frac{n}{2}-1}(a\varrho)$
8	$\left(\dfrac{d}{a\,da}\right)^m\dfrac{\delta(r-a)}{a}$	$\Omega_{n-1}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{\sin a\varrho}{\varrho}$, $n = 2m+3$

№ п/п	Обобщенная функция $f(x)$	Ее преобразование Фурье $\tilde{f}(\varrho)$
9	$(P+i0)^{\lambda}$	$\dfrac{e^{-\frac{\pi}{2}qi}\,2^{n+2\lambda}\,\pi^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}\;\Gamma(-\lambda)}\,(Q-i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}$
10	$(P-i0)^{\lambda}$	$\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}qi}\,2^{n+2\lambda}\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}\;\Gamma(-\lambda)}\,(Q+i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}$
11	P_{+}^{λ}	$\dfrac{2^{n+2\lambda}\,\pi^{\frac{n}{2}-1}\,\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\cdot\dfrac{1}{2i}\left[e^{-i\left(q+\frac{\lambda}{2}\right)\pi}(Q-i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}-e^{i\left(\frac{q}{2}+\lambda\right)\pi}(Q+i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}\right]$
12	P_{-}^{λ}	$\dfrac{-2^{n+2\lambda}\,\pi^{\frac{n}{2}-1}\,\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\,\dfrac{1}{2i}\left[e^{-\frac{\pi}{2}qi}(Q-i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}-e^{\frac{\pi}{2}qi}(Q+i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}\right]$

№ п/п	Обобщенная функция $f(x)$	Ее преобразование Фурье $\tilde{f}(\varrho)$
13	$(c^2+P+i0)^\lambda$	$$\frac{2^{\lambda+1}(\sqrt{2\pi})^n c^{\frac{n}{2}+}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\,\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c\,(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}=$$ $$=\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1}\pi^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{q\pi i}{2}}c^{\lambda+\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\left[\frac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_+^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_+^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}+\right.$$ $$\left.+\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{H^{(1)}_{-\lambda-\frac{n}{2}}\left(cQ_-^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right]$$

№ п/п	Обобщенная функция $f(x)$	Ее преобразование Фурье $\tilde{f}(\varrho)$
14	$(c^2+P-i0)^{\lambda}$	$\frac{2^{\lambda+1}(\sqrt{2\pi})^n c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\vert\Delta\vert}}\cdot\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}=$ $=\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1}\pi^{\frac{n}{2}}e^{\frac{q\pi i}{2}}c^{\lambda+\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\vert\Delta\vert}}\left[\frac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_{+}^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_{+}^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}-\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{H^{(2)}_{-\lambda-\frac{n}{2}}\left(cQ_{-}^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_{-}^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right]$

№ п/п	Обобщенная функция $f(x)$	Ее преобразование Фурье $\tilde{f}(\varrho)$
15	$\dfrac{(c^2+P)_+^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}$	$-\dfrac{2^{\lambda+\frac{n}{2}}\, i\pi^{\frac{n}{2}-1}\, c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\left\{e^{-i\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)\pi}\dfrac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c\,(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}-e^{i\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)\pi}\dfrac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c\,(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right\}$
16	$\dfrac{(c^2+P)_-^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}$	$\dfrac{2^{\lambda+\frac{n}{2}}\, i\pi^{\frac{n}{2}-1}\, c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\times$ $\times\left\{e^{-\frac{q\pi i}{2}}\dfrac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c\,(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}-e^{\frac{q\pi i}{2}}\dfrac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c\,(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right\}$

№ п/п	Обобщенная функция $f(x)$	Ее преобразование Фурье $\tilde{f}(\varrho)$
17	$\delta^{(s-1)}(c^2+P)$	$(-1)^{s+1}\frac{i}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}2^{\frac{n}{2}-s}\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}-s}\times$ $\times\left[e^{-\frac{\pi i q}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}-s}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-s\right)}}-e^{\frac{\pi i q}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}-s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-s\right)}}\right]$
18	$\frac{(c^2+P)^s}{\Gamma(s+1)}$	$(2\pi)^n\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m\left(\frac{c}{2}\right)^{2s-2m}}{4^m\,m!\,(s-m)!}L^m\delta(\varrho).$
19	Многочлен $P(x_1, \ldots, x_n)$	$(2\pi)^n\,P\left(-i\frac{\partial}{\partial s_1}, \ldots, -i\frac{\partial}{\partial s_n}\right)$

Относительно обозначений, касающихся квадратичных форм, см. § 3; в частности, Q — форма, сопряженная с P.

Коэффициенты $c_{-1}^{(n+2m)}$, $c_{0}^{(n+2m)}$ и т. д. суть коэффициенты разложения в ряд Лорана функции

$$C_\lambda = 2^{\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}$$

в окрестности точки $\lambda = -n - 2m$.

6. Положительно определенные обобщенные функции. Обобщенная функция $f(x)$ называется *положительно определенной*, если для любой функции $\varphi(x)$ из пространства K выполняется неравенство $(f, \varphi * \varphi^*) \geqslant 0$, где положено $\varphi^*(x) = \overline{\varphi(-x)}$.

Для того чтобы обобщенная функция $f(x)$ была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы она была преобразованием Фурье положительной меры μ степенного роста (т. е. такой меры μ, что интеграл $\int (1+|x|^2)^{-p}\, d\mu(x)$ сходится при некотором $p > 0$).

Любая положительно определенная обобщенная функция может быть представлена в виде $f(x) = (1-\Delta)^m f_1(x)$, где $f_1(x)$ — положительно определенная непрерывная функция. Свертка двух положительно определенных обобщенных функций положительно определена.

§ 5. Преобразование Радона

1. Преобразование Радона основных функций и его свойства. Преобразование Фурье функций нескольких переменных разлагается на два преобразования: на интегрирование преобразуемой функции по плоскостям n-мерного пространства и на одномерное преобразование Фурье. Именно, если

$$\tilde{f}(\xi) = \int f(x)\, e^{i(\xi,\, x)}\, dx,$$

где $(\xi, x) = \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n$, то

$$\tilde{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\xi, p)\, e^{ip}\, dp,$$

где положено

$$\check{f}(\xi,\ p)=\int f(x)\,\delta(p-(\xi,\ x))\,dx$$

(относительно значения символа $\delta(p-(\xi,\ x))$ см. § 3, п. 5).

Функцию $\check{f}(\xi,\ p)$ называют ***преобразованием Радона*** функции $f(x)$. Основные свойства преобразования Радона выражаются следующими формулами:

1) $\check{f}(\alpha\xi,\ \alpha p)=|\alpha|^{-1}\check{f}(\xi,\ p)$ для любого $\alpha\neq 0$;

2) $\{f(x+a)\}^{\vee}=\check{f}(\xi,\ p+(\xi,\ a))$;

3) $\{f(A^{-1}x)\}^{\vee}=|\det A|\,\check{f}(A'\xi,\ p)$, где A — невырожденное линейное преобразование и A' — сопряженное ему преобразование;

4) $\left\{\left(a,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)f(x)\right\}^{\vee}=(a,\ \xi)\frac{\partial\check{f}(\xi,\ p)}{\partial p}$;

5) $\frac{\partial}{\partial p}\left\{(a,\ x)f(x)\right\}^{\vee}=-\left(a,\ \frac{\partial}{\partial\xi}\right)\check{f}(\xi,\ p)$;

6) $(f_1*f_2)^{\vee}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\check{f}_1(\xi,\ t)\,\check{f}_2(\xi,\ p-t)\,dt.$

Функция $f(x)$ выражается через $\check{f}(\xi,\ p)$ по формуле

$$f(x)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}\int\limits_{\Gamma}\check{f}_p^{(n-1)}(\xi,\ (\xi,\ x))\,d\omega,$$

если n нечетно, и по формуле

$$f(x)=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Gamma}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\check{f}(\xi,\ p)(p-(\xi,\ x))^{-n}\,dp\right)d\omega,$$

если n четно. Через Γ здесь обозначена произвольная поверхность, окружающая начало, и через $d\omega$ — дифференциальная форма на этой поверхности, определяемая равенством

$$d\omega=\sum(-1)^{k-1}\xi_k\,d\xi_1\ldots d\xi_{k-1}\,d\xi_{k+1}\ldots d\xi_n.$$

Интеграл по p надо понимать в смысле регуляризованного значения (см. § 2, п. 2).

Аналог формулы Планшереля для преобразования Радона имеет следующий вид:

$$\int f(x)\overline{g(x)}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2(2\pi)^{n-1}}\int\limits_{\Gamma}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\check{f}_p^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(\xi,p)\,\overline{\check{g}_p^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(\xi,p)}\,dp\right)d\omega$$

для пространства нечетной размерности и

$$\int f(x)\overline{g(x)}\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Gamma}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\check{f}(\xi,p_1)\overline{\check{g}(\xi,p_2)}\times\right.$$

$$\left.\times(p_1-p_2)^{-n}\,dp_1dp_2\right)d\omega$$

для пространства четной размерности (интеграл по p_1, p_2 также следует понимать в смысле регуляризованного значения).

2. Преобразование Радона обобщенных функций. Пусть S — пространство бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих вместе со всеми производными, и пусть число переменных n нечетно. Через $\check{S}$ обозначено пространство функций $\psi(\xi, p)$ вида $\psi(\xi, p)=\check{f}_p^{(n-1)}(\xi, p)$, где $f(x)\in S$. Это пространство состоит из таких функций $\psi(\xi, p)$, что:

1) $\psi(\alpha\xi, \alpha p)=|\alpha|^{-n}\psi(\xi, p)$ для любого $\alpha\neq 0$;

2) функции $\psi(\xi, p)$ бесконечно дифференцируемы по ξ и по p при $\xi\neq 0$;

3) для любого $k>0$ при $|p|\to\infty$ имеет место оценка $|\psi(\xi, p)|=o(p^{-k})$ равномерно по ξ, когда ξ пробегает произвольную ограниченную замкнутую область, не содержащую точки $\xi=0$; та же оценка имеет место для производных функции ψ;

4) для любого целого числа $k\geqslant 0$ интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi, p)p^k\,dp$$

является однородным многочленом от ξ степени $k-n+1$ (при $k<n-1$ интеграл равен нулю).

Каждой обобщённой функции (F, f) в пространстве S сопоставляется функционал $\check{F}$ в $\check{S}$, такой, что

$$(F, f)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}(\check{F}, \psi).$$

Этот функционал можно распространить на пространство всех функций $\psi(\xi, p)$, удовлетворяющих условиям 1)—3), однако при этом он будет определен не однозначно, а лишь с точностью до линейных комбинаций функций вида $p^k a_{-k-1}(\xi)$, где при $k<n-1$ $a_{-k-1}(\xi)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию однородности

$$a_{-k-1}(\alpha\xi)=\alpha^{-k}|\alpha|^{-1}a_{-k-1}(\xi);$$

при $k\geqslant n-1$, кроме условия однородности, должно еще выполняться условие

$$\int_\Gamma a_{-k-1}(\xi)P_{k-n+1}(\xi)\,d\omega=0$$

для любого однородного многочлена $P_{k-n+1}(\xi)$ степени $k-n+1$.

Особый интерес представляют преобразования Радона характеристических функций неограниченных областей. Дело в том, что *для ограниченных областей преобразование Радона $S(\xi, p)$ характеристической функции области V дает площадь сечения этой области плоскостью* $(\xi, x)=p$. Поэтому преобразование Радона характеристической функции неограниченной области можно рассматривать как регуляризованное значение площадей сечений этой области.

3. Таблица преобразований Радона некоторых обобщенных функций в нечетномерном пространстве. В этой таблице положено

$$\theta(t)=\begin{cases}1, & \text{когда } t>0,\\ 0, & \text{когда } t<0,\end{cases}$$

$P(x)$ — невырожденная квадратичная форма, $Q(x)$ — сопряженная с ней квадратичная форма.

Функция	Преобразование Радона
1	$p^{n-1}a(\xi)$, где $a(\xi)$ — произвольная четная однородная функция степени однородности $-n$, такая, что $\int\limits_{\Gamma} a(\xi)\,d\omega = (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^n \pi^{n-1}\Gamma^{-1}(n)$
$\theta(x_1)$	$\frac{1}{2}\pi^{n-\frac{3}{2}}\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{n+1}{2}\right)\times$ $\times\,[p_+^{n-1}(\xi_1)_+^{-1}+p_-^{n-1}(\xi_1)_-^{-1}]\,\delta(\xi_2,\ldots,\xi_n)$
$\delta(x_1,\ldots,x_n)$	$\delta(p)$
$\delta(x_1,\ldots,x_k)$, k — нечетное $(k<n)$	$\pi^{n-k-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{k-n+1}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{n-k}{2}\right)\lvert p\rvert^{n-k-1}\delta(\xi_{k+1},\ldots,\xi_n)$
$\delta(x_1,\ldots,x_k)$, k — четное $(k<n)$	$(-1)^{\frac{n-k+1}{2}}2\pi^{n-k-\frac{1}{2}}\Gamma^{-1}\left(\frac{n-k+1}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{n-k}{2}\right)\times$ $\times\,p^{n-k-1}\ln\lvert p\rvert\,\delta(\xi_{k+1},\ldots,\xi_n)$
$a(x_1)\,\delta(x_2,\ldots,x_n)$, где $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lvert a(x_1)\rvert\,dx_1<\infty$	$\lvert\xi_1\rvert^{-1}a\left(\frac{p}{\xi_1}\right)$

Функция	Преобразование Радона
$(x_1)_+^\lambda\,\delta(x_2, \ldots, x_n)$, λ — не целое	$p_+^\lambda\,(\xi_1)_+^{-1-\lambda} + p_-^\lambda\,(\xi_1)_-^{-1-\lambda}$
$(x_1)_+^k\,\delta(x_2, \ldots, x_n)$, $k=0, 1, \ldots$	$p_+^k\,(\xi_1)_+^{-1-k} + p_-^k\,(\xi_1)_-^{-1-k} - \frac{(-1)^k}{k!}\,p^k \ln\lvert p\rvert\,\delta^{(k)}(\xi_1)$
$\lvert x_1\rvert^\lambda\,\delta(x_2, \ldots, x_n)$, $\lambda \neq -1, -2, \ldots$, $\lambda \neq 2k\ (k=0, 1, \ldots)$	$\lvert p\rvert^\lambda\,\lvert \xi_1\rvert^{-1-\lambda}$
$x_1^{2k}\,\delta(x_2, \ldots, x_n)$, $k=0, 1, \ldots$	$p^{2k}\,\lvert\xi_1\rvert^{-1-2k} - \frac{2}{(2k)!}\,p^{2k}\ln\lvert p\rvert\,\delta^{(2k)}(\xi_1)$
$\lvert x_1\rvert^\lambda \operatorname{sign} x_1\,\delta(x_2, \ldots, x_n)$, $\lambda \neq -1, -2, \ldots$, $\lambda \neq 2k-1\ (k=1, 2, \ldots)$	$\lvert p\rvert^\lambda \operatorname{sign} p\,\lvert\xi_1\rvert^{-1-\lambda}\operatorname{sign}\xi_1$
$x_1^{2k-1}\,\delta(x_2, \ldots, x_n)$, $k=1, 2, \ldots$	$p^{2k-1}\,\lvert\xi_1\rvert^{-2k}\operatorname{sign}\xi_1 + \frac{2}{(2k-1)!}\,p^{2k-1}\ln\lvert p\rvert\,\delta^{(2k-1)}(\xi_1)$
Характеристическая функция верхней полы конуса в трехмерном пространстве $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0,\ x_1 > 0$	$\pi\,[p_+^2\,\theta(\xi_1) + p_-^2\,\theta(-\xi_1)]\,(\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)_+^{-\frac{3}{2}} + p^2\ln\lvert p\rvert\,(\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)_-^{-\frac{3}{2}}$

Функция	Преобразование Радона
Характеристическая функция верхней полы гиперболоида в трехмерном пространстве $x_1^2-x_2^2-x_3^2>1,\ x_1>0$	$\pi\theta(\xi,\ p)(\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)_+^{-\frac{3}{2}}(p^2-\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)_+ +$ $+\frac{1}{2}(\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)_-^{-\frac{3}{2}}(p^2-\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)\ln\lvert p^2-\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\rvert$
$P_+^{\lambda}(x)$	$\dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}\lvert p\rvert^{2\lambda+n-1}}{(\lambda+1)\dots\left(\lambda+\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\lvert\Delta\rvert}\sin\pi\lambda}\times$ $\times\left[\sin\pi\left(\frac{l}{2}+\lambda\right)Q_+^{-\lambda-\frac{n}{2}}(\xi)-\sin\frac{\pi k}{2}Q_-^{-\lambda-\frac{n}{2}}(\xi)\right]$, где k, l — соответственно число положительных и число отрицательных квадратов в каноническом представлении формы $P(x)$; Δ — дискриминант формы $P(x)$
$\theta(x_1)(x_1^2-x_2^2-\dots-x_n^2)_+^{\lambda}$	$\dfrac{\pi^{\frac{n-1}{2}}[p_+^{2\lambda+n-1}\theta(\xi_1)+p_-^{2\lambda+n-1}\theta(-\xi_1)]}{(\lambda+1)\dots\left(\lambda+\frac{n-1}{2}\right)}(\xi_1^2-\xi_2^2-\dots-\xi_n^2)_+^{-\lambda-\frac{n}{2}}-$ $-\dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}\lvert p\rvert^{2\lambda+n-1}}{2(\lambda+1)\dots\left(\lambda+\frac{n-1}{2}\right)\sin\pi\lambda}(\xi_1^2-\xi_2^2-\dots-\xi_n^2)_-^{-\lambda-\frac{n}{2}}$

Функция	Преобразование Радона
$[P(x)+c]_+^{\lambda}$	$\dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(\lambda+1)\ldots\left(\lambda+\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\lvert\Delta\rvert}\sin\pi\lambda}\times$ $\times\Big[\sin\pi\left(\frac{l}{2}+\lambda\right)Q_+^{-\lambda-\frac{n}{2}}(p^2+cQ)_+^{\lambda+\frac{n-1}{2}}-$ $-\sin\frac{\pi k}{2}Q_-^{-\lambda-\frac{n}{2}}(p^2+cQ)_+^{\lambda+\frac{n-1}{2}}+$ $+\sin\pi\left(\frac{l-1}{2}+\lambda\right)Q_-^{-\lambda-\frac{n}{2}}(p^2+cQ)_-^{\lambda+\frac{n-1}{2}}-$ $-\sin\frac{\pi(k-1)}{2}Q_+^{-\lambda-\frac{n}{2}}(p^2+cQ)_-^{\lambda+\frac{n-1}{2}}\Big]$
$\theta(x_1)(x_1^2-x_2^2-x_3^2-1)_+^{\lambda}$	$\frac{\pi}{\lambda+1}\theta(p\xi_1)(\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)_+^{-\lambda-\frac{3}{2}}(p^2-\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)_+^{\lambda+1}+$ $+\frac{\pi}{2(\lambda+1)\sin\pi\lambda}(\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)_-^{-\lambda-\frac{3}{2}}(p^2-\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)_+^{\lambda+1}$

Функция	Преобразование Радона
$\delta(x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2)$	$(-1)^{\frac{n-1}{2}} 2\pi^{\frac{n-3}{2}} \Gamma^{-1}\left(\frac{n-1}{2}\right) p^{n-3} \ln\lvert p\rvert (\xi_1^2 - \xi_2^2 - \ldots - \xi_n^2)_-^{-\frac{n}{2}+1}$
$\delta(x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1)$	$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma^{-1}\left(\frac{n-1}{2}\right) \times$ $\times (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^{-\frac{n}{2}+1} (p^2 - \xi_1^2 - \ldots - \xi_n^2)_+^{\frac{n-3}{2}}$
$\delta(x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2 - 1)$	$\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma^{-1}\left(\frac{n-1}{2}\right) (\xi_1^2 - \xi_2^2 - \ldots - \xi_n^2)_+^{-\frac{n}{2}+1} \times$ $\times (p^2 - \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2)_+^{\frac{n-3}{2}} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n-3}{2}} \Gamma^{-1}\left(\frac{n-1}{2}\right) \times$ $\times (\xi_1^2 - \xi_2^2 - \ldots - \xi_n^2)_-^{-\frac{n}{2}+1} \times$ $\times (p^2 - \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2)_-^{\frac{n-3}{2}} \times$ $\times \ln\left\lvert \frac{p^2 - \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2}{\xi_1^2 - \xi_2^2 - \ldots - \xi_n^2} \right\rvert$

§ 6. Обобщенные функции и дифференциальные уравнения

1. Фундаментальные решения. Пусть $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. *Фундаментальным решением*, соответствующим этому оператору, называется обобщенная функция $E(x)$, удовлетворяющая уравнению $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E(x)=\delta(x)$. Эта функция определена с точностью до решения однородного уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=0$. *Если $\mu(x)$ — такая обобщенная функция, что имеет смысл свертка $E*\mu(x)$, то эта свертка является решением дифференциального уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=\mu(x)$.*

Например, оператору Лапласа

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

при $n>2$ соответствует фундаментальное решение $-\frac{r^{2-n}}{(n-2)\,\Omega_n}$, где $r=(x_1^2+\ldots+x_n^2)$, Ω_n — площадь поверхности единичной сферы, а при $n=2$ соответствует решение $-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$. Поэтому решением уравнения Пуассона $\Delta u=\mu$ при условии, что массы $\mu(x)$ сосредоточены в ограниченной области, служит при $n>2$ функция

$$u(x_1, \ldots, x_n)=-\frac{1}{(n-2)\,\Omega_n}\int\frac{\mu(\xi_1, \ldots, \xi_n)\,d\xi_1\ldots d\xi_n}{[(x_1-\xi_1)^2+\ldots+(x_n-\xi_n)^2]^{\frac{n-2}{2}}}.$$

Пусть теперь уравнение содержит время t. Пусть $P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, имеющий относительно t порядок m. Соответствующим ему *фундаментальным решением задачи Коши* называют обобщенную функцию $E(x, t)$ такую, что

$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) E(x, t)=0$ и выполняются начальные условия

$$E(x, 0)=0, \ldots, \frac{\partial^{m-2} E(x, 0)}{\partial t^{m-2}}=0,$$

$$\frac{\partial^{m-1} E(x, 0)}{\partial t^{m-1}}=\delta(x).$$

Решение задачи Коши для уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t)=0$ *с начальными условиями*

$$u(x, 0)=0, \ldots, \frac{\partial^{m-2} u(x, 0)}{\partial t^{m-2}}=0,$$

$$\frac{\partial^{m-1} u(x, 0)}{\partial t^{m-1}}=u_{m-1}(x)$$

имеет вид

$$u(x, t)=E(x, t) * u_{m-1}(x)$$

(при условии, что свертка имеет смысл).

Решение задачи Коши с начальными условиями

$$u(x, 0)=0, \ldots, \frac{\partial^{m-2} u(x, 0)}{\partial t^{m-2}}=u_{m-2}(x), \quad \frac{\partial^{m-1} u(x, 0)}{\partial t^{m-1}}=0$$

также можно выразить через функцию $E(x, t)$. Для этого полагают $v(x, t)=E(x, t) * u_{m-2}(x)$ и обозначают $\hat{u}_{m-1}(x)= =\frac{\partial^{m-1} v(x, 0)}{\partial t^{m-1}}$. Тогда решение указанной задачи Коши имеет вид

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t}-E(x, t) * \hat{u}_{m-1}(x).$$

Аналогично получается решение задачи Коши, если отлична от нуля производная $(m-k)$-го порядка. Решение задачи Коши в общем случае является суммой таких решений.

Для одномерного уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ фундаментальное решение задачи Коши имеет вид

$$E(x, t)=\frac{1}{2 \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad t>0.$$

Поэтому решение задачи Коши при начальном условии $u(x, 0) = u_0(x)$ дается формулой

$$u(x, t) = E(x, t) * u_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} u_0(x-\xi)\, d\xi.$$

Для волнового уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ фундаментальное решение задачи Коши имеет вид

$$E(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при} \quad |x| < t, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > t. \end{cases}$$

Пользуясь им, легко получить решение задачи Коши для этого уравнения в форме Даламбера.

Отметим следующее утверждение:

Если $E(x, t)$ является фундаментальным решением задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) = 0,$$

то функция

$$E_0(x, t) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad t < 0, \\ E(x, t) & \textit{при} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

является фундаментальным решением для оператора $\frac{\partial}{\partial t} - P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)$, т. е. удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial E_0(x, t)}{\partial t} - P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) E_0(x, t) = \delta(x, t).$$

Определение функции $E_0(x, t)$ означает, что для любой функции $\varphi(x, t)$ из пространства K

$$(E_0(x, t), \ \varphi(x, t)) = \int_0^{\infty} (E(x, t), \ \varphi(x, t))\, dt.$$

В левой части равенства $E_0(x, t)$ применяется к основной функции двух переменных $\varphi(x, t)$, в правой части под знаком интеграла $E(x, t)$ при каждом фиксированном $t > 0$ применяется к основной функции одного переменного $\varphi(x, t)$,

2. Фундаментальные решения для некоторых дифференциальных уравнений. Для итерированного оператора Лапласа Δ^m фундаментальное решение имеет вид

$$E(x)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^m(2\pi)^n c_{-1}^{(2m)}}{\Omega_n} r^{2m-n}\ln r, & \text{если } 2m>n \text{ и } n\text{ — четное},\\ (-1)^m(2\pi)^n C_{-2m} r^{2m-n} & \text{в остальных случаях},\end{cases}$$

(см. стр. 386).

Для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

в нечетномерном пространстве, $n=2m+3$, $m=0, 1, 2, \ldots$, фундаментальное решение задачи Коши дается формулой

$$E(x, t)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\Omega_{n-1}}\left(\frac{d}{t\,dt}\right)^m\frac{\delta(r-t)}{t}$$

(Ω_{n-1} — площадь поверхности $(n-1)$-мерной единичной сферы). Поэтому при начальном условии

$$u(x, 0)=0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}=f(x)$$

решение задачи Коши имеет вид

$$u(x, t)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\Omega_{n-1}}\left(\frac{d}{t\,dt}\right)^m\frac{\delta(r-t)}{t}*f(x)=$$
$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Omega_n}{\Omega_{n-1}}\left(\frac{d}{t\,dt}\right)^m t^{n-2} M_t(f),$$

где $M_t(f)$ означает среднее от функции $f(x-\xi)$ по сфере $|\xi|=t$.

Фундаментальное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в n-мерном пространстве дается формулой

$$E(x, t)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^n e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{при } t>0,\\ 0 & \text{при } t\leqslant 0.\end{cases}$$

Фундаментальные решения для дифференциальных операторов вида L^k, где

$$L=\sum_{\alpha, \beta=1}^{n} g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta},$$

имеют следующий вид:

1) Если n — нечетное число, или если n — четное число и $k<\frac{n}{2}$, то

$$E_1(x)=(-1)^k\frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)\sqrt{|\Delta|}}{4^k(k-1)!\,\pi^{\frac{n}{2}}}(P+i0)^{-\frac{n}{2}+k},$$

где

$$P=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}g_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta,\qquad \sum_{\beta=1}^{n}g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma}=\delta_\alpha^\gamma$$

(относительно обозначений, связанных с квадратичными формами P, см. § 3, п. 2). Второе фундаментальное решение имеет вид $E_2(x)=\overline{E_1(x)}$.

2) Если n — четное число и $k\geqslant\frac{n}{2}$, то

$$E_1(x)=(-1)^{\frac{n}{2}-1}\frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}\sqrt{|\Delta|}}{4^k\left(k-\frac{n}{2}\right)!\,(k-1)!}(P+i0)^{-\frac{n}{2}+k}\ln(P+i0),$$

$$E_2(x)=\overline{E_1(x)}.$$

3. Построение фундаментальных решений для эллиптических уравнений. Пусть $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — дифференциальный оператор порядка $2m$ с постоянными коэффициентами, P_0 — главная часть этого оператора, содержащая лишь производные порядка $2m$. Оператор P называется *эллиптическим,* если при замене в P_0 символов $\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}$ переменными $\omega_1,\ldots,\omega_n$ получается многочлен $P_0(\omega_1,\ldots,\omega_n)$, не обращающийся в нуль при $\omega\neq0$ $(\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_n))$.

Для получения фундаментального решения $E(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, соответствующего эллиптическому оператору P, заменяют уравнение

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E(x)=\delta(x)$$

уравнением

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=\frac{2r^\lambda}{\Omega_n\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)},\quad r=(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

После этого разлагают обобщенную функцию r^λ на плоские волны (см. § 3, п. 1) и решают уравнения

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v=\frac{|\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n|^\lambda}{\Omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}.$$

Интегрируя эти решения по ω и полагая $\lambda=-n$, получают искомое фундаментальное решение (поскольку при $\lambda=-n$ обобщенная функция $\dfrac{2r^\lambda}{\Omega_n\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$ равна $\delta(x)$). Таким путем получают

$$E(x_1,\ldots,x_n)=\int_\Omega v_\omega(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n,-n)\,d\Omega,$$

где Ω — единичная сфера,

$$v_\omega(\xi,\lambda)=\frac{1}{\Omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}G(\xi-\eta,\omega)\,|\eta|^\lambda\,d\eta,$$

и

$$P\left(\omega_1\frac{d}{d\xi},\ldots,\omega_n\frac{d}{d\xi}\right)G(\xi,\omega)=\delta(\xi).$$

В случае нечетного числа измерений

$$E(x_1,\ldots,x_n)=C_1\int_\Omega\frac{\partial^{n-1}G(\xi,\omega)}{\partial\xi^{n-1}}\,d\Omega,$$

где

$$C_1=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\Omega_n(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,1\cdot3\ldots(n-2)}.$$

Для однородного эллиптического дифференциального оператора $(P=P_0)$ решение уравнения

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=\frac{2r^\lambda}{\Omega_n\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$$

дается формулой

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int\limits_\Omega \left\{ \frac{|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^{\lambda+2m}}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+2m)} + \right.$$

$$\left. + Q_\lambda\left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k\right)\right\} \frac{d\Omega}{P(\omega_1, \ldots, \omega_n)},$$

где

$$Q_\lambda(\xi) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\xi^{2m-2k}}{(2k-1)!\,(2m-2k)!\,(\lambda+2k)}.$$

При $\lambda = -n$ получаем фундаментальное решение, соответствующее оператору P. В фундаментальном решении можно оставить лишь те члены многочлена $Q_\lambda(\xi)$, которые нужны, чтобы получаемая функция не имела полюса при $\lambda = -n$.

Если n нечетно и $2m \geqslant n$, то фундаментальное решение имеет вид

$$E(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{4(2\pi)^{n-1}(2m-n)!} \int\limits_\Omega |\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^{2m-n} \frac{d\Omega}{P(\omega_1, \ldots, \omega_n)}.$$

Если n четно и $2m \geqslant n$, то

$$E(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}}{(2\pi)^n (2m-n)!} \int\limits_\Omega |\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^{2m-n} \times$$

$$\times \ln|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n| \frac{d\Omega}{P(\omega_1, \ldots, \omega_n)}.$$

Если n нечетно и $2m < n$, то

$$E(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int\limits_\Omega \delta^{(n-2m-1)}(\omega_1 x_1 + \ldots$$

$$\ldots + \omega_n x_n) \frac{d\Omega}{P(\omega_1, \ldots, \omega_n)},$$

и если n четно и $2m < n$, то

$$E(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-2m-1)!}{(2\pi)^n} \int\limits_\Omega |\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^{-n+2m} \frac{d\Omega}{P(\omega_1, \ldots, \omega_n)}.$$

Фундаментальное решение является обычной функцией, аналитичной при $x \neq 0$ и удовлетворяющей в окрестности начала координат соотношениям

$$E(x) = \begin{cases} O(r^{2m-n} \ln r), & \text{если } n \text{ четно и } 2m \geqslant n, \\ O(r^{2m-n}) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При $2m > n$ функция $E(x)$ имеет в начале координат непрерывные производные до порядка $2m-n-1$.

4. Фундаментальные решения однородных регулярных уравнений. Линейный дифференциальный оператор $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ с постоянными коэффициентами называется *регулярным*, если он однороден (т. е. все члены являются производными одного и того же порядка m) и если на конусе $P(\omega_1, \ldots, \omega_n) = 0$ градиент функции $P(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ не обращается в нуль при $\omega \neq 0$. Для регулярного оператора фундаментальное решение имеет вид

$$E(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{\Omega} \frac{f_{mn}\left(\sum x_k \omega_k\right) d\Omega}{P(\omega_1, \ldots, \omega_n)},$$

где Ω — единичная сфера, а функция $f_{mn}(x)$ имеет следующие значения:

1) если n четно и $m \geqslant n$, то

$$f_{mn}(x) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}}{(2\pi)^n (m-n)!} x^{m-n} \ln |x|;$$

2) если n четно и $m < n$, то

$$f_{mn}(x) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+m} (n-m-1)!}{(2\pi)^n} x^{m-n};$$

3) если n нечетно и $m \geqslant n$, то

$$f_{mn}(x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{4(2\pi)^{n-1}(m-n)!} x^{m-n} \operatorname{sign} x;$$

4) если n нечетно и $m < n$, то

$$f_{mn}(x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \delta^{(n-m-1)}(x).$$

При этом интеграл понимается в смысле регуляризованного значения:

$$E(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{\varepsilon \to 0} E_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n),$$

где

$$E_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{f_{mn}\left(\sum x_k \omega_k\right) d\Omega}{P(\omega_1, \ldots, \omega_n)}.$$

Здесь через Ω_ε обозначено множество точек на единичной сфере, для которых $|P(\omega_1, \ldots, \omega_n)| > \varepsilon$.

5. Фундаментальное решение задачи Коши. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = 0$$

порядка m по переменному t. Пусть дифференциальный оператор

$$P_\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) = P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \omega_1 \frac{\partial}{\partial \xi}, \ldots, \omega_n \frac{\partial}{\partial \xi}\right)$$

таков, что для уравнения

$$P_\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) v = 0$$

задача Коши корректна. Тогда фундаментальное решение задачи Коши для исходного уравнения имеет вид

$$E(t, x) = \int\limits_{\Omega} v_\omega(t, x_1\omega_1 + \ldots + x_n\omega_n, -n)\, d\Omega,$$

где

$$v_\omega(t, \xi, \lambda) = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_\omega(t, \xi - \eta) |\eta|^\lambda\, d\eta,$$

а $G_\omega(t, \xi)$ — фундаментальное решение задачи Коши для уравнения $P_\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) v = 0$.

В случае нечетного числа переменных получается более простая формула:

$$E(t, x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} (n-1)!} \int_{\Omega} \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} G_{\omega}(t, \xi)\, d\Omega.$$

Однородный линейный оператор с постоянными коэффициентами $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ называется *гиперболическим*, если при любых значениях $\omega_1, \ldots, \omega_n$, $\sum_{k=1}^{n} \omega_k^2 = 1$, уравнение m-го порядка относительно v:

$$P(v, \omega_1, \ldots, \omega_n) = 0,$$

имеет m вещественных и различных корней.

Решение гиперболического уравнения

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u(x, t) = 0$$

при начальных условиях

$$\frac{\partial^k u(x, 0)}{\partial t^k} = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant m-2,$$

$$\frac{\partial^{m-1} u(x, 0)}{\partial t^{m-1}} = \frac{2r^{\lambda}}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$$

имеет вид

$$u(x_1, \ldots, x_n, t) = -\frac{2}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \times$$

$$\times \int_{H=0} \left\{ \frac{|\xi|^{-\lambda-n} \left|\sum x_k \xi_k + t\right|^{\lambda+m-1} \operatorname{sign}\left(\sum x_k \xi_k + t\right)^{m-1}}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m-1)} + \right.$$

$$\left. + Q\left(\frac{\sum x_k \xi_k + t}{|\xi|}\right) \right\} \omega,$$

где

$$Q_{\lambda}(\xi) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{\xi^{m-2k-1}}{(2k-1)!\,(m-2k-1)!\,(\lambda-2k)},$$

через $H(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ обозначена функция $P(1, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ и через ω — выражение

$$\frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H| \operatorname{sign}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{\partial H}{\partial \xi_k}\right)}$$

($d\sigma$ — элемент поверхности $H=0$).

При $\lambda = -n$ получается фундаментальное решение задачи Коши. Если n нечетно, то решение имеет вид

$$E(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}(m-n-1)!} \times \\ \times \int\limits_{H=0} \left(\sum x_k\xi_k + t\right)^{m-n-1} \left[\operatorname{sign}\left(\sum x_k\xi_k + t\right)\right]^{m-1} \omega;$$

если же n четно, то решение имеет вид

$$E(x_1, \ldots, x_n) = \frac{2(-1)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n (m-n-1)!} \times \\ \times \int\limits_{H=0} \left(\sum x_k\xi_k + t\right)^{m-n-1} \ln \left|\frac{\sum x_k\xi_k + t}{\sum x_k\xi_k}\right| \omega$$

(*формулы Герглотца—Петровского*). Когда порядок m уравнения меньше, чем $n-1$, формулы для фундаментального решения задачи Коши приобретают вид

$$E(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{(2\pi)^{n-1}} \int\limits_{H=0} \delta^{(n-m)}\left(\sum x_k\xi_k + t\right) \omega$$

при нечетном n и

$$E(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-m)!}{(2\pi)^n} \int\limits_{H=0} \frac{\omega}{\left(\sum x_k\xi_k + t\right)^{n-m+1}}$$

при четном n.

Все интегралы в этих формулах понимаются в смысле регуляризованного значения.

§ 7. Обобщенные функции в комплексном пространстве

1. Обобщенные функции одного комплексного переменного. При рассмотрении функций комплексного переменного используются операторы

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

где $z=x+iy$. Например, ряд Маклорена пишется так:

$$f_1(x, y)\equiv f(z, \bar{z})=\sum_{j,\,k=0}^{\infty}\frac{f^{(j,\,k)}(0, 0)}{j!\,k!}z^j\bar{z}^k,$$

где положено $f^{(j,\,k)}(z, \bar{z})\equiv\dfrac{\partial^{j+k}f(z, \bar{z})}{\partial z^j\partial\bar{z}^k}$ и $f(z, \bar{z})=f_1\left(\dfrac{z+\bar{z}}{2}, \dfrac{z-\bar{z}}{2i}\right)$.

Для аналитических функций $\dfrac{\partial f(z)}{\partial\bar{z}}=0$ (это следует из условий Коши—Римана).

При интегрировании функций $f(z, \bar{z})$ пользуются дифференциальной формой $dz\,d\bar{z}=-2i\,dx\,dy$.

Пусть K—пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(z, \bar{z})$. Пусть λ и μ—такие комплексные числа, что $n=\lambda-\mu$—целое число. Тогда при $\operatorname{Re}(\lambda+\mu)>-2$ сходящийся интеграл

$$(z^\lambda\bar{z}^\mu, \varphi)=\frac{i}{2}\int z^\lambda\bar{z}^\mu\varphi(z, \bar{z})\,dz\,d\bar{z}$$

определяет обобщенную функцию $z^\lambda\bar{z}^\mu$ в K. Эта функция однородна, а именно: для любой функции $\varphi(z, \bar{z})$ из K справедливо равенство

$$\left(z^\lambda\bar{z}^\mu, \varphi\left(\frac{z}{a}, \frac{\bar{z}}{\bar{a}}\right)\right)=a^{\lambda+1}\bar{a}^{\mu+1}(z^\lambda\bar{z}^\mu, \varphi(z, \bar{z})).$$

При $\operatorname{Re}(\lambda+\mu)<-2$ обобщенная функция $z^\lambda \bar{z}^\mu$ определяется с помощью аналитического продолжения по $s\equiv\lambda+\mu$:

$$(z^\lambda \bar{z}^\mu, \varphi)=\frac{i}{2}\int\limits_{|z|\leqslant 1} z^\lambda \bar{z}^\mu \left[\varphi(z, \bar{z})-\sum_{k+l=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(k, l)}(0, 0)}{k!\, l!} z^k \bar{z}^l\right] dz\, d\bar{z}+$$

$$+\frac{i}{2}\int\limits_{|z|>1} z^\lambda \bar{z}^\mu \varphi(z, \bar{z})\, dz\, d\bar{z}+2\pi\sum_{\substack{k+l=0\\ k-l=-n}}^{m-1}\frac{\varphi^{(k, l)}(0, 0)}{k!\, l!\,(k+l+\lambda+\mu+2)},$$

где $\operatorname{Re}(\lambda+\mu)>-m-2$.

Обобщенная функция $z^\lambda \bar{z}^\mu$ регулярна всюду, за исключением точек $\lambda, \mu=-1, -2, \ldots$ В этих точках функция $z^\lambda \bar{z}^\mu$, как функция от $s=\lambda+\mu$ при фиксированном $n=\lambda-\mu$, имеет простые полюсы. При этом

$$\operatorname*{Выч}_{\substack{\lambda=-k-1\\ \mu=-l-1}} z^\lambda \bar{z}^\mu=2\pi\frac{(-1)^{k+l}}{k!\, l!}\delta^{(k, l)}(z, \bar{z}),$$

где

$$(\delta, \varphi)=\varphi(0, 0) \quad\text{и}\quad \delta^{(k, l)}(z, \bar{z})=\frac{\partial^{k+l}\delta(z, \bar{z})}{\partial z^k\, \partial\bar{z}^l}.$$

Нормированная обобщенная функция

$$\frac{z^\lambda \bar{z}^\mu}{\Gamma\left(\frac{s+|n|+2}{2}\right)}$$

является целой аналитической функцией от $s=\lambda+\mu$ при фиксированном $n=\lambda-\mu$. При $\lambda=-k-1$, $\mu=-l-1$ имеем

$$\left.\frac{z^\lambda \bar{z}^\mu}{\Gamma\left(\frac{s+|n|+2}{2}\right)}\right|_{\substack{\lambda=-k-1\\ \mu=-l-1}}=\frac{\pi(-1)^{k+l+j}j!}{k!\, l!}\delta^{(k, l)}(z, \bar{z}),$$

где $j=\min(k, l)$.

Обобщенная функция z^{-k-1} является частным случаем $z^\lambda \bar{z}^\mu$. Ее можно определить равенством

$$z^{-k-1}=(-1)^k\frac{1}{k!}\frac{\partial^k(z^{-1})}{\partial z^k}.$$

При этом

$$\frac{\partial(z^{-k-1})}{\partial\bar{z}}=(-1)^k\frac{\pi}{k!}\,\delta^{(k,\,0)}(z,\bar{z})$$

(производная не равна нулю, так как z^{-k-1} не аналитична в точке $z=0$).

Так же, как и в вещественном случае, вводятся присоединенные однородные функции $z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}\ln^m|z|$:

$$(z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}\ln^m|z|,\,\varphi)=\frac{i}{2}\int z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}\ln^m|z|\,\varphi(z,\bar{z})\,dz\,d\bar{z},$$

где интеграл надо понимать в смысле регуляризованного значения. Присоединенной однородной функцией является и функция

$$(z^{-k-1}\bar{z}^{-l-1},\varphi)=$$
$$=\frac{i}{2}\int z^{-k-1}\bar{z}^{-l-1}\left[\varphi(z,\bar{z})-\sum_{i+j=0}^{k+l-1}\frac{\varphi^{(i,\,j)}(0,0)}{i!\,j!}z^i\bar{z}^j-\right.$$
$$\left.-\theta(1-|z|)\sum_{i+j=k+l}\frac{\varphi^{(i,\,j)}(0,0)}{i!\,j!}z^i\bar{z}^j\right]dz\,d\bar{z}.$$

Преобразованием Фурье функции $\varphi(z,\bar{z})$ называют функцию

$$\tilde{\varphi}(w,\bar{w})=\frac{i}{2}\int\varphi(z,\bar{z})\,e^{i\,\mathrm{Re}\,z\bar{w}}\,dz\,d\bar{z}.$$

Преобразование Фурье обобщенной функции F определяется равенством

$$(\tilde{F},\tilde{\varphi})=4\pi^2(F,\varphi_1),$$

где $\varphi_1(z,\bar{z})=\varphi(-z,-\bar{z})$.

Имеет место формула

$$\widetilde{\frac{z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}}{\Gamma\left(\frac{s+|n|+2}{2}\right)}}=2^{\lambda+\mu+2}\pi i^{|\lambda-\mu|}\frac{w^{-\mu-1}\bar{w}^{-\lambda-1}}{\Gamma\left(\frac{-s+|n|}{2}\right)},$$

где $s=\lambda+\mu$, $n=\lambda-\mu$.

Так же вводятся обобщенные функции вида $f^{\lambda}(z)\bar{f}^{\mu}(z)$, где $f(z)$ — мероморфная функция и $n=\lambda-\mu$ — целое число. Если финитная функция $\varphi(z, \bar{z})$ сосредоточена в области, содержащей один нуль кратности k функции $f(z)$ и не содержащей полюсов этой функции, то интеграл

$$(f^{\lambda}\bar{f}^{\mu}, \varphi)=\frac{i}{2}\int f^{\lambda}(z)\bar{f}^{\mu}(z)\varphi(z, \bar{z})\,dz\,d\bar{z}$$

при заданном $\lambda-\mu$ сходится в области $\operatorname{Re}(\lambda+\mu)>0$.

При $\operatorname{Re}(\lambda+\mu)<0$ его значение определяют путем аналитического продолжения по $s=\lambda+\mu$. Единственными особенностями этого интеграла как аналитической функции от λ и μ являются простые полюсы в точках $(\lambda, \mu)=$ $=\left(-\frac{p}{k}, -\frac{q}{k}\right)$, $p, q=1, 2, \ldots$ ($\lambda-\mu$ — целое).

Точно так же, если функция $\varphi(z, \bar{z})$ сосредоточена в области, содержащей один полюс порядка l функции $f(z)$ и не содержащей нулей этой функции, то интеграл сходится при $\operatorname{Re}(\lambda+\mu)<0$. При $\operatorname{Re}(\lambda+\mu)>0$ его значение определяется путем аналитического продолжения по $s=\lambda+\mu$. Единственными особенностями этого интеграла как функции от λ и μ являются простые полюсы в точках $(\lambda, \mu)=$ $=\left(\frac{p}{l}, \frac{q}{l}\right)$, $p, q=1, 2, \ldots$

В общем случае интеграл определяют путем разбиения функции $\varphi(z, \bar{z})$ на конечное число слагаемых, каждое из которых сосредоточено в области, содержащей не более одного нуля или полюса функции $f(z)$.

2. Обобщенные функции *m* комплексных переменных. Пусть S — поверхность в m-мерном комплексном пространстве, задаваемая уравнением

$$P(z)\equiv P(z_1, \ldots, z_m)=0\,^{*)},$$

где $P(z)$ — бесконечно дифференцируемая функция от z и $\bar{z}$. Предполагается, что дифференциальная форма $dP\,d\bar{P}$ не обращается в нуль на поверхности S. Дифференциальную форму

*) Чтобы не усложнять записи, функции m комплексных переменных часто обозначают через $P(z)$ вместо $P(z, \bar{z})$.

$d\omega$ порядка $2m-2$ определяют соотношением

$$\left(\frac{i}{2}\right)^m dz\,d\bar{z}=\frac{i}{2}\,dP\,d\bar{P}\,d\omega$$

и полагают

$$(\delta(P),\varphi)=\int\limits_{P=0}\varphi\,d\omega.$$

Здесь приняты обозначения

$$\left(\frac{i}{2}\right)^m dz\,d\bar{z}=\left(\frac{i}{2}\right)^m dz_1\,d\bar{z}_1\ldots dz_m\,d\bar{z}_m$$

и

$$dP=\sum\frac{\partial P}{\partial z_k}\,dz_k+\frac{\partial P}{\partial \bar{z}_k}\,d\bar{z}_k.$$

Пусть

$$\delta^{(k,l)}(P)=\frac{\partial^{k+l}\delta(P)}{\partial P^k\partial\bar{P}^l}.$$

Для этой обобщенной функции остаются справедливыми свойства, установленные в вещественном случае (см. § 3, п. 5):

1) $\dfrac{\partial}{\partial z_i}\delta^{(k,l)}(P)=\dfrac{\partial P}{\partial z_i}\delta^{(k+1,l)}(P)+\dfrac{\partial\bar{P}}{\partial z_i}\delta^{(k,l+1)}(P)$, и аналогичная формула для $\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\delta^{(k,l)}(P)$;

2) $P\delta(P)=\bar{P}\delta(P)=0$,

$$P\delta^{(k,l)}(P)+k\delta^{(k-1,l)}(P)=0,$$
$$\bar{P}\delta^{(k,l)}(P)+l\delta^{(k,l-1)}(P)=0;$$

3) если поверхности $P=0$, $Q=0$ не имеют особых точек и не пересекаются, то

$$\delta(PQ)=P^{-1}\bar{P}^{-1}\delta(Q)+Q^{-1}\bar{Q}^{-1}\delta(P).$$

В частности, если функция $a(z)$ не обращается в нуль, то

$$\delta(aP)=a^{-1}\bar{a}^{-1}\delta(P).$$

Если функция P аналитична $\left(\dfrac{\partial P}{\partial\bar{z}_i}=0\right)$, то

$$\delta^{(k,l)}(aP)=a^{-k-1}\,\bar{a}^{\,-l-1}\delta^{(k,l)}(P)$$

для всех функций $a(z)$, нигде не обращающихся в нуль.

Пусть $G(z)$ — целая аналитическая функция от m комплексных переменных $z_1, \ldots, z_m$. Если $\lambda-\mu=n$ — целое число, то полагают

$$(G^\lambda \overline{G}^\mu, \varphi)=\left(\frac{i}{2}\right)^m \int G^\lambda(z)\, \overline{G}^\mu(z)\, \varphi(z, \overline{z})\, dz\, d\overline{z},$$

где

$$G^\lambda \overline{G}^\mu=|G|^{\lambda+\mu} e^{i(\lambda-\mu)\arg G}.$$

Если поверхность $G(z)=0$ не имеет особых точек, то единственными особенностями обобщенной функции $G^\lambda \overline{G}^\mu$, рассматриваемой как функция от λ, μ, являются простые полюсы в точках

$$(\lambda, \mu)=(-k-1, -l-1), \qquad k, l=0, 1, \ldots,$$

с вычетами

$$\underset{\substack{\lambda=-k-1\\ \mu=-l-1}}{\text{Выч}}\; G^\lambda \overline{G}^\mu=(-1)^{k+l}\frac{2\pi}{k!\, l!}\,\delta^{(k, l)}(G).$$

Пусть $P(z)$ — невырожденная квадратичная форма от m комплексных переменных:

$$P=\sum_{i, j=1}^{m} g_{ij} z_i z_j.$$

Рассматривается

$$(P^\lambda \overline{P}^\mu, \varphi)=\left(\frac{i}{2}\right)^m \int P^\lambda(z)\, \overline{P}^\mu(z)\, \varphi(z, \overline{z})\, dz\, d\overline{z}.$$

Этот интеграл сходится при $\operatorname{Re}(\lambda+\mu)>0$.

Чтобы выразить $P^\lambda \overline{P}^\mu$ при $\operatorname{Re}(\lambda+\mu)<0$, вводят дифференциальные операторы

$$L_P=\sum_{i, j=1}^{m} g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial z_i\, \partial z_j}, \quad \overline{L}_P=\sum_{i, j=1}^{m} \overline{g^{ij}}\frac{\partial^2}{\partial \overline{z}_i\, \partial \overline{z}_j},$$

где

$$\sum_{j=1}^{m} g^{ij} g_{jk}=\delta_k^i.$$

Тогда при $\operatorname{Re}(\lambda+\mu)>-k-l$ определяют $P^\lambda \overline{P}^\mu$ формулой

$$P^\lambda \overline{P}^\mu=C(\lambda, k)\, C(\mu, l)\, L_P^k \overline{L}_P^l P^{\lambda+k} \overline{P}^{\mu+l},$$

где

$$C(\nu, p) = \\ = \left\{4^p(\nu+1)\ldots(\nu+p)\left(\nu+\frac{m}{2}\right)\ldots\left(\nu+\frac{m}{2}+p-1\right)\right\}^{-1}.$$

Обобщенная функция $P^\lambda \overline{P}^\mu$ имеет две серии особых точек:

$$(\lambda, \mu) = (-k-1, -l-1), \qquad k, l = 0, 1, 2, \ldots,$$

и

$$(\lambda, \mu) = \left(-\frac{m}{2}-k, -\frac{m}{2}-l\right), \qquad k, l = 0, 1, \ldots$$

Если точка (λ, μ) принадлежит только одной из этих серий, то в ней $P^\lambda \overline{P}^\mu$ имеет простой полюс; если же (λ, μ) принадлежит обеим сериям, то $P^\lambda \overline{P}^\mu$ имеет в ней полюс порядка 2.

В случае, когда точка $\lambda = -k-1$, $\mu = -l-1$ принадлежит только первой серии, $\underset{\substack{\lambda=-k-1\\ \mu=-l-1}}{\text{Выч}} P^\lambda \overline{P}^\mu$ есть обобщенная функция, сосредоточенная на поверхности $P=0$. Определяют

$$\delta^{(k, l)}(P) \equiv \frac{1}{2\pi}(-1)^{k+l} k!\, l! \underset{\substack{\lambda=-k-1\\ \mu=-l-1}}{\text{Выч}} P^l \overline{P}^\mu.$$

Если точка (λ, μ) принадлежит только второй серии, т. е. $\lambda = -\frac{m}{2}-k$, $\mu = -\frac{m}{2}-l$, причем m — нечетное число, то Выч $P^\lambda \overline{P}^\mu$ в этой точке равен

$$\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{-m-2k-2l+1} \pi^{m+1}}{k!\, l!\, \Gamma\left(\frac{m}{2}+k\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}+l\right) |\Delta|} L_P^k \overline{L}_P^l \delta(z),$$

где Δ — дискриминант квадратичной формы P.

С помощью обобщенных функций вида $P^\lambda \overline{P}^\mu$ можно построить фундаментальные решения уравнений

$$L^k u = f(z),$$

где

$$L=\sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial z_i\,\partial \bar z_j}$$

и матрица $\|g^{ij}\|$ не вырождена.

Именно пусть

$$P=\sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}z_iz_j,\quad \text{где}\quad \sum_{j=1}^{m} g^{ij}g_{jk}=\delta_k^i.$$

В случае пространства нечетной размерности фундаментальным решением является функция

$$K=\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}+k}\,2^{m-2k}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-k\right)|\Delta|}{\pi^{m+1}(k-1)!}P^{-\frac{m}{2}+k}\bar P^{-\frac{m}{2}}.$$

Если m — четное число и $k\geqslant\frac{m}{2}$, то фундаментальное решение имеет вид

$$K=\frac{2^{m-2k}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)|\Delta|}{\pi^m(k-1)!\left(k-\frac{m}{2}\right)!}P^{-\frac{m}{2}+k}\bar P^{-\frac{m}{2}}.$$

Наконец, если m — четное число и $k<\frac{m}{2}$, то фундаментальное решение имеет вид

$$K=\frac{(-1)^{\frac{m}{2}-1}\,2^{m-2k}|\Delta|}{\pi^{m-1}(k-1)!}\,\delta^{\left(\frac{m}{2}-k-1,\ \frac{m}{2}-1\right)}(P).$$

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Агранович З. С. и Марченко В. А., Обратная задача рассеяния, Изд-во Харьковского университета, 1960.
2. Ахиезер Н. И. и Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Гостехиздат, 1950.
3. Банах С., Курс функціонального аналізу, Радянська школа, Київ, 1948.
4. Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, Физматгиз, 1959.
5. Бурбаки Н., Общая топология, Физматгиз, 1959.
6. Вайнберг М. М., Вариационные методы исследования нелииейиых операторов, Физматгиз, 1956.
7. Вулих Б. З., Теория полуупорядочеиных пространств, Физматгиз, 1961.
8. Вулих Б. З., Введение в функциональный аиализ, Физматгиз, 1958.
9. Гельфаид И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца, Физматгиз, 1960.
10. Гельфаид И. М. и Шилов Г. Е., Обобщенные фуикции, вып. 1: Обобщенные фуикции и действия иад иими, изд. 2-е, Физматгиз, 1959.
11. Гельфаид И. М. и Шилов Г. Е., Обобщенные функции, вып. 2: Пространства осиовных и обобщенных функций, Физматгиз, 1958.
12. Гельфаид И. М. и Шилов Г. Е., Обобщенные фуикции, вып. 3: Некоторые вопросы теории дифференциальных уравиений, Физматгиз, 1958.
13. Гельфаид И. М. и Виленкии Н. Я., Обобщенные функции, вып. 4: Некоторые примеиения гармоиического анализа. Оснащенные гильбертовы простраиства, Физматгиз, 1961.
14. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я., Обобщенные функции, вып. 5: Интегральиая геометрия и связаиные с ней вопросы теории представлений, Физматгиз, 1962.
15. Гольдмаи И. И и Кривчеиков В. Д., Сборник задач по квантовой механике, Гостехиздат, 1957.
16. Данфорд Н. и Шварц Л., Лииейные операторы, ИЛ, 1962.

17. Дей М. М., Линейные нормированные пространства, ИЛ, 1961.
18. Дирак П. А. М., Принципы квантовой механики, Физматгиз, 1960.
19. Канторович Л. В. и Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.
20. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Гостехиздат, 1950.
21. Като Т., Сб. переводов «Математика» 2:4 (1958), стр. 118—135.
22. Колмогоров А. Н. и Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, вып. 1, Изд-во Московского университета, 1954.
23. Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, 1956.
24. Красносельский М. А., Некоторые задачи нелинейного анализа, Успехи матем. наук IX:3 (1954), 57—114.
25. Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений, Физматгиз, 1962.
26. Крейн М. Г. и Рутман М. А., Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, Успехи матем. наук III:1 (1948).
27. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Квантовая механика, Гостехиздат, 1948.
28. Ландау Л. Д и Лифшиц Е. М., Теория поля, Физматгиз, 1960.
29. Лерэ Ж. и Шаудер Ю., Топология и функциональные уравнения, Успехи матем. наук I:3—4 (1946), 71—95.
30. Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ, ИЛ, 1956.
31. Люстерник Л. А. и Соболев В. И., Элементы функционального анализа, Гостехиздат, 1951.
32. Маслов В. П., Квазиклассическая асимптотика решений некоторых задач математической физики, I, II, Журнал вычислительной математики и математической физики 1:1 (1961) и 1:4 (1961).
33. Микусинский Я. и Сикорский Р., Элементарная теория обобщенных функций, вып. 1, ИЛ, 1959.
34. Микусинский Я. и Сикорский Р., Элементарная теория обобщенных функций, вып. 2, ИЛ, 1963.
35. Мотт Н. и Месси Г., Теория атомных столкновений, ИЛ, 1951.
36. Наймарк М. А., Нормированные кольца, Гостехиздат, 1956.
37. Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, Гостехиздат, 1954.
38. Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, Гостехиздат, 1954.
39. Рисс Ф. и Надь Б. С., Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954.
40. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. V, Физматгиз, 1959.

41. Смирнов Н. С., Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений, ОНТИ, 1936.
42. Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, 1950.
43. Соболевский П. Е., Труды Московского матем. общества, т. 10, 297—350, Физматгиз, 1961.
44. Халилов З. И., Основы функционального анализа, Баку, 1949.
45. Халмош П., Конечномерные векторные пространства, Физматгиз, 1963.
46. Хилл Е., Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1951.
47. Хилл Е. и Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1962.
48. Швебер С., Бете Г., Гофман Ф., Мезоны и поля, I, ИЛ, 1957.
49. Шилов Г. Е., Введение в теорию линейных пространств, изд. 2, Физматгиз, 1956.
50. Красносельский М. А. и Рутицкий Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича, Физматгиз, 1958.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ ПО ГЛАВАМ

К главе I

[3], [4], [5], [8], [17], [19], [22], [31], [40], [42], [44], [46], [49], [50].

К главе II

[2], [16], [31], [37], [39], [40], [42], [45].

К главе III

[21], [39], [43], [46], [47].

К главе IV

[6], [19], [23], [24], [29], [31], [41], [46].

К главе V

[7], [20], [25], [26].

К главе VI

[9], [30], [38], [47].

К главе VII

[1], [15], [18], [27], [28], [32], [35], [48].

К главе VIII

[10], [11], [12], [13], [14], [33], [34].

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
292	2 сн.	$\|x\|^2+\varepsilon$	$\|x\|^{2+\varepsilon}$
312	6 св.	величина	величина, равная числу нулей якобиана $J(t)$ вдоль траектории с учетом их кратности
	12 св.	$[Y(x_{0k}, t)]$	$\|J(x_{0k}, t)\|$
	6 сн.	ψ_s	φ_s
381	Формула № 11	$e^{-i\left(q+\frac{\lambda}{2}\right)\pi}$	$e^{-i\left(\frac{q}{2}+\lambda\right)\pi}$
382	Формула № 13	$c^{\frac{n}{2}+}$	$c^{\frac{n}{2}+\lambda}$

Заказ 1013